Joh. Heinrich Lamberts

ehemaligen Königl. Preußl. Oberbaurathes und ordentl. Mitgliedes der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin 2c.

deutscher gelehrter Briefwechsel.

Herausgegeben

von

Joh. Bernoulli

der nämlichen Academie der Wissenschaften ordentliches und mehr andern ausserordentliches Mitglied.

Des funften Bandes zweyter Theil.

Zusätze und Berichtigungen zu dem ganzen Briefwechsel.

Mit 4 Kupfertafeln.

Preis: 20 Gr. Sächs. conv. Geld.

Berlin, bey dem Herausgeber und bey Franz de la Garde.

Leipzig, bey G. E. Beer.

1787.

Vorbericht.

Mit diesem Theile, wegen dessen später Erscheinung ich diejenigen, die ihn früher gewünschet und erwartet haben, um Vergebung bitte, wird nun des unvergeßlichen Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel geschlossen. Der zweyte und letzte Band seiner logischen und philosophischen Abhandlungen hat, mit merkwürdigen Betrachtungen über Lamberts Leben, Schriften und Character, von den Herren Professoren Eberhard und Müller, begleitet, vor wenigen Wochen endlich ebenfalls die Presse verlassen. Hinterlassene ausgesuchte Abhandlungen des grossen Mannes, über mathematische, astronomische und physicalische Gegenstände, habe ich in diesen letzt vergangenen Jahren, in die Mémoires de l'Acad. des Sc. & B. L. de Berlin, in die Acta Helvetica Tom. IX. und in das Leip-

ziger Magazin der Mathematik, ꝛc. einrücken lassen. Nun wäre zwar noch vorzüglich der Briefwechsel in andern Sprachen (meist französisch) zu drucken übrig, und etwa ein Band vermischter Aufsätze über Materien die schönen Wissenschaften, Philosophie, gemeine Naturlehre ꝛc betreffend; welchem man Lamberts geführtes Monatsbuch mit dem dabey erforderlichen Commentar, beyfügen könnte Ich muß aber für jetzt der Bekanntmachung dieser Schriften entsagen, und mich auf den Wunsch einschränken, gelegentlich zu vernehmen, welchen von Lamberts Verehrern mit einer solchen Fortsetzung seiner hinterlassenen Schriften gedienet wäre, um sodann vielleicht unter günstigeren Umständen und mit gehöriger Musse, meine Maasregeln zu ihrer Befriedigung nehmen zu können. Berlin, im Nov. 1787.

Joh. Bernoulli.

Inhalt.

Inhalt

des

fünften Bandes, zweyten Theiles.

Zusätze zu dem I. Bande.

A. Des Herausgebers kurze Bemerkung, den Briefwechsel mit Holland und Karsten betreffend. S. 251

B. C. Zu S. 304—319. Ueber das Problem: zu drey gegebenen Cirkeln einen vierten zu finden, der jene drey berühre; von den Herren Tessaneck und Oberreit; nebst einer andern Aufgabe, von dem letztern 252

D. Nachricht von den Lebensumständen des verstorbenen Professor Tönnies (zu S. 408). 256

Zusätze zu dem II. Bande.

E. Schreiben des Herrn D. und Prof. Reccard über dasjenige, was vom Hrn. Prof. Müller, in meiner Vorrede zu diesem IIten Bande, von Lamberts Religion gesagt wird. (NB. Eine Antwort auf dieses Schreiben, vom Herrn Prof. Müller, stehet in dem 2ten Bande der log. und phil. Abhandlungen, a. d. 372—382. S.) 260

F. Kurzer Nachtrag zu der Geschichte von Lamberts Schriften. 263

G. Ueber Lamberts Religion; von Hrn. Nicolai. 264

H. Schreiben des Hrn. Chorherrn Geßner in Zürich, über Lamberts und Otts meteorologische Abhandlungen 266

I. Fernere Nachrichten vom Herrn Prof. Jetzler in Schafhausen, und a. Brief desselben an den Herausgeber. 30 Apr. 1782. ; ; ; S. 267

b. Brief von Lambert an Jetzler, d. 29. Apr. 1765. 271

c. Desgl. vom 30. Sept. 1765. ; ; 273

d. Desgl. vom 19. May 1766. ; ; 275

(Es sind die Antworten auf Hrn. Jetzlers Briefe, II. 202 — 222.)

K. Hrn. Prof. Grillo, in Berlin, Nachricht von dem verstorb. Kaufmann Good. ; ; 281

L. a. Hrn. Ludw. Oberreits Zusatz zu seinem Briefe II. 366; von Berechnung der Stundenwinkel auf abweichenden Vertical-Sonnenuhren ; 282

b. Derselbe über Lamberts Aufgabe II. 372. und über ein paar Aufgaben in Lamberts Beyträgen zur practischen Geometrie ; 294

c. Dessen Nachtrag zu seinem Aufsatze von der Reihe für die Quadratwurzel, im Leipz. Mag. 1784. 309

d. Ders. über eine Stelle von Lamberts freyen Perspective. ; ; ; ; 320

e. Dess. Berichtigung einer Stelle in Lamberts Briefe an ihn, II. B. 381. ; ; 323

M. Noch ein paar Fragmente aus Lamberts Briefen an Oberreit, (mit Anmerkungen von Herrn O.)

1. Von Zeichnung der Kegelschnitte ; ; 326

2. Vom Gebrauch des hyperbolischen Sectors. 330

N. Kleine litterarische Nachlese zu dem II. Bande. 338

Zusätze zu dem III. Bande.

O. L. Oberreits Anmerkung zu S. 277. wie die absolute Zahl 1,2589 des Log. 0,1000000 zu finden. 340.

Zusätze zu dem IV. Bande.

P. Hr. L. Oberreit über des Frhrn. v. Paccassi neuerfundene Integral-Rechnung ; ; 344

J. Desselben Anmerkung zu Lamberts Brief an Wolfram IV. 474. u. ff. von sehr convergirenden Formeln zur Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. S. 353

K. Supplemente zu den Briefen von Wolfram an Lambert, IV. 436—536. 364

1. Zu S. 491. Tafel zum Nivelliren. 366

2. Zu S. 500. Eine Tafel von 9402 Rakettensätzen mit Erläuterungen. 368

3. Zu S. 503. Verzeichniß der Prim- und durch Primzahlen theilbaren Zahlen, welche unter 1000^2. 380

4. Zu S. 508. Drey Proben von Wolframs Weise die hyperbolischen Logarithmen zu berechnen.

Erste Probe: durch die Formeln: Log. $\frac{1+n}{1}$; Log. $\frac{1}{1-n}$, und Log. $\frac{1+n}{1-n}$ 381

Zweyte Probe: oder von den Zahlen, deren Logarithmen man aus den Dignitäten der Zahl 2 mit Vortheil finden kann. 392

Dritte Probe: Eine Tafel von den Dignitäten von $\frac{1}{2}$ oder von 5′; und wie daraus von verschiedener Zahlen die Logarithmen zu finden 410

5. Zu S. 517. Verschiedene Wege den Logarithmen von der Primzahl 3343 zu finden, wenn die vorhergehenden kleinern Logarithmen bekannt sind. 428

6. Zu S. 521. Wolframs Abriß seiner Zergliederung der Zahlen. 438

7. Zu S. 523. Beyspiele von seiner Berechnung der Sinus und Cosinus. 443

8. Zu S. 529. Dessen Versuch von den Perioden der Decimalzahlen. 448

9. Zu S. 530. Beweis daß die unendliche Reihe $\frac{2}{3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11}$ ꝛc. durch keinen Irrational-Bruch genau ausgedrückt werden könne. 456

10. Zu S. 533. Drey Beylagen

a. 2 Tabellen, welche zeigen, wie viel Primzahlen man bis 10,000, bis 20,000, bis 300,000 und weiter zählen könne. 459

b. Tafel, welche von 27 absol. Zahlen, die weitere Ausführung der hyperb. Logarithmen enthält. 460

c. Zwey weiter ausgeführte Tafeln, die Logarithmen zu verwandeln ; ; ; 461

11. Auszug eines Briefes von Hrn. Wolfram an den Hrn. G. K. R. Davisson, seine Arbeiten und Briefwechsel mit Lambert betreffend. ; 461

S. Hrn. L. Oberreits Betrachtungen über die periodischen Decimal-Reihen, zu IV. 534. ; 464

Zusätze zu des V. Bandes I. Theil.

T. Ein Schreiben des Herrn Hauptmanns v. Stamford, an den Herausgeber um eine Stelle S. 16. zu widerrufen. ; ; ; 482

U. Der Herren Nic. Fuß und Dan. Bernoulli Berichtigungen meiner Anmerkung, a. d. 34. S. ; 483

W. Ant. Felkels abgenöthigte Rechtfertigung über einige im Vten Bande des Lambertschen Briefwechsels ihm unrecht zur Last gelegte, oder sonst mißverstandene Umstände. (Nebst Zusätzen des Herausgebers). ; ; ; ; 486

A. Des

Des fünften Bandes

Zweyter Theil.

Zusätze zu Lamberts deutschem gelehrten Briefwechsel.

Zusätze zu dem I. Bande.

A.

Den Anfang dieses gelehrten Briefwechsels machen die zwischen Lambert und dem Herrn von Holland, gewechselten Briefe; sie nehmen den größten Theil des ersten Bandes ein, und werden von Kennern vorzüglich geschätzt. Es ist bekannt, daß der Herr von Holland bald nach der Herausgabe dieser Briefe, die von ihm selbst zum Drucke revidiret und mit Anmerkungen versehen worden, viel zu frühe für die gelehrte Welt, in seinen besten Jahren verstorben ist. Daher mag es zum Theil rühren, daß ich für diesen Band wenig beyzufügen habe.

Zu den Stellen S. 15. 107. 116. 117. 151 und 160. welche die früheren Schriften des Herrn Hofrath Karsten's betreffen, hat dieser berühmte Gelehrte an welchem die mathematischen Wissenschaften ganz neulich wiederum einen grossen Verlust durch den Tod erlitten haben, Erinnerungen gemacht die ich bereits in dem IV. Bande S. 348—353 habe abdrucken lassen.

B.

Bey dem XXXIII. Briefe und den zwey folgenden S. 304—319, kann wegen des darinn untersuchten Problems: zu drey gegebenen Cirkeln einen vierten zu finden, der jene drey berühre, kann meine Vorrede p. XIX—XXII. und in dem IV. Bande ein Brief von Lambert S. 424—426 nachgelesen werden. Ich muß aber hier noch beyfügen, was der in der Vorrede S. XXII. angeführte berühmte Mathematiker Herr Prof. Tessaneck in Prag, in Absicht auf Newtons Beleuchtung dieser Aufgabe mir am 20. April 1782 überschrieben hat.

In Tomo I. Epistolarum *Cl. Lamberti* vidi Problema de describendo circulo, qui tangat tres circulos positione & magnitudine datos. Existimo autem, unum casum alio difficiliorem non esse & *Newtonum* in Lemmate XVI. Libri Imi (Quamvis ibi de Problemate illo trium circulorum ne quidem cogitaverit) Problema istud pro omni casu resolvisse. Locus enim centrorum circulorum datos duos circulos externe tangentium est hyperbola; & centrum circuli describendi, qui tangat externe datos tres circulos, est intersectio hyperbolarum, communem focum habentium. Hanc intersectionem Newtonus ope Geometriæ communis determinat. Axis autem hyperbolæ unius, & alterius est differentia radiorum circulorum datorum, qui bini combinantur. Describendus jam sit circulus, qui interne tangat datos tres circulos; & eadem est solutio respective.

Descri-

Describendus ſit circulus qui unum datorum tangat interne, duos externe. Dico, locum centrorum circulorum, qui unum datorum tangant interne, alterum externe, hyperbolam eſſe, cujus axis æqualis eſt ſummæ radiorum circulorum datorum. Ergo in omni caſu axis hyperbolæ unius, & alterius eſt vel ſumma, vel differentia radiorum duorum circulorum, qui bini combinantur. Solvitur ergo Problema in omni caſu interſectione duarum hyperbolarum, communem focum habentium. Quam interſectionem cum Newtonus in Lemmate citato ope Geometriæ planæ determinaverit, exiſtimo, eum Problema trium circulorum citato loco pro omni caſu ſolviſſe. Determinatio enim axium hyperbolarum in diverſis caſibus facillima eſt; ut adeo tota difficultas conſiſtat in determinanda interſectione duarum hyperbolarum, communem focum habentium. Opinor etiam non eſſe quærendam ſolutionem caſuum omnium generalem; ſed quot ſunt caſus, tot eſſe Problemata, quæ ſingula ſeorſim ſunt pertractanda. Videtur id bene illuſtrari ſequenti facillimo exemplo:

Ducenda ſit linea recta, quæ tangat duos circulos datos.

Fig. 1. Sit. $AB = x$, $BD = a$, $BC = r$, $DE = R$; erit

$x:r = x+a:R$; $x:r = a:R-r$; $x = \frac{ar}{R-r}$. Duci

autem poſſunt 4 tangentes; quarum una eſt FG. Suntque caſus duo: unus, ſi punctum A cadat ultra D & B; alter, ſi inter B & D. Arbitror au-

tem, non esse quærendam solutionem Problematis generalem, quæ utrumque casum complectatur; obtinetur enim pro casu utroque seorsim æquatio gradus primi. Et hanc ob rem non quærerem æquationem gradus secundi, multo minus (licet 4 tangentes duci possint) æquationem gradus quarti.

Idem sentio de Problemate trium circulorum. Quod proinde citato loco a Newtono adæquate solutum esse existimo.

C.

Ueber dasselbe Problem, von dem Churfürstl. Sächs. Ober-Finanzbuchhalter Herrn **Ludwig Oberreit** in Dresden. *)

a. S. 314. des Briefwechsels sagt L. von dem Problem einen Cirkel zu finden, der drey andere gegebene und zugleich sich selbst berührende Cirkel ebenfalls berühren soll, habe er in einer Dissertation eine algebraische Auflösung gesehen, die nicht kurz gewesen sey. — Ich habe, ohne eine Auflösung vorher gesehen zu haben, vor mehrern Jahren mich ebenfalls an dieses Problem gemacht, und das Resultat meiner Auflösung, wie ich glaube, so geschmeidig gefunden, als man es verlangen kann. Denn sind die Halbmesser der gegebenen Cirkel $=$ p, q und r: so ist der Halbmesser des gesuch-

*) Aus 2 Briefen an mich vom 18. Januar und 2. März 1782. B.

gesuchten der jene inwendig oder auswendig berühren wird, $= pqr : [2\sqrt{pqr} \cdot \sqrt{(p+q+r)} \pm (pq+pr+qr)]$. Dies führe ich nur als eine Anmerkung zu jener Stelle an.

Kürzlich ist mir eine Aufgabe vorgelegt worden, die mir ebenfalls einige Aufmerksamkeit zu verdienen schiene.

Fig. 2. Von einem Triangel nämlich der mit einer aus einem Winkel gezogenen Linie getheilt ist, sind gegeben die Winkel m und n, desgleichen die entgegen gesetzten Grundlinien a und b. Man soll daraus die übrigen Seiten und Winkel finden. — Ich habe eine Auflösung gefunden, die zu einer ganz leichten und einfachen Construction Anleitung giebt: nämlich $\mathrm{Cot.}\ p = (b.\ \mathrm{Cot.}\ n - a.\ \mathrm{Cot.}\ m) : (a+b)$.

b. — Wegen der letztbemeldten Auflösung des Problems von den drey Cirkeln, achte ich für dienlich, zu Vermeidung etwaniger Mißdeutung hier noch anzumerken, daß jene nur für einen besondern Fall dienet. Die allgemeine Formel aber ist eigentlich folgende, die allerdings auch weitläuftig ist. — Die Seiten des Triangels, den die Distanzen der Mittelpuncte der gegebenen Cirkel formiren, seyen $= a, b, c$; die den Seiten gegen überstehenden Halbmesser derselben Cirkel $= p, q, r$; der Halbmesser des gesuchten, alle drey berührenden Cirkels $= x$; und die gesuchte Gleichung sey $Ax = \pm\sqrt{B} - C$; so ist, wenn man Kürze halber, den vierten Theil des Flächen-Inhalts des Triangels, oder

$$\sqrt{[a^2-(b-c)^2]} \cdot \sqrt{[(b+c)^2-a^2]} = S$$

setzet:

 $A = S^2$

$$A = S^4 - 4a^2.(p-q).(p-r)$$
$$\quad - 4b^2.(q-p).(q-r)$$
$$\quad - 4c^2.(r-q).(r-p).$$

$$B = S^2.[a^2b^2c^2 - a^2.(p-q)^2.[b^2-(p-r)^2]$$
$$\quad - b^2.(q-r)^2.[c^2-(q-p)^2]$$
$$\quad - c^2.(r-p)^2.[a^2-(r-q)^2]$$
$$\quad - [p^2.(r-q)+q^2.(p-r)+r^2.(q-p)]^2.]$$

$$-C = a^4p+b^4q+c^4r - a^2b^2(p+q) - a^2c^2(p+r) - b^2c^2(q+r)$$
$$\quad + a^2.(p-q).(p-r).(2p+q+r)$$
$$\quad + b^2.(q-r).(q-p).(2q+p+r)$$
$$\quad + c^2.(r-p).(r-q).(2r+p+q).$$

Man sieht hieraus, daß, ungeachtet der starken und weitläuftigen Verwickelung, doch eine gewisse Regelmässigkeit der Combinationen sich zeigt. — Am kürzesten wird der Ausdruck, wenn $p=q=r$ ist; denn da wird $x = \frac{abc}{\pm S} - p.$

D.

Von den Gelehrten, welche an den übrigen Abschnitten des I. Bandes Theil haben, sind seitdem auch einige verstorben: **Bodmer**, **Havichorst**, **Plouquet** und **Tönnies**; von dem letztern, als dem wenigst bekannten und auf den jedoch **Lambert**, wie man aus seinem Briefe S. 408—414 siehet, viel gehalten hat, wird eine kurze Nachricht von seinen Lebensumständen nicht unangenehm seyn. In **Meusels** gel. Deutschland, 4te Ausgabe

Ausgabe, 4ter Band (1784) lieset man: „Joh. „Heinr. Tönnies geb. zu Elze im Hildesheimi= „schen, am 10. Aug. 1725, war bis 1769 Professor „der Philos. zu Kiel, hierauf 1771 Prediger zu „Dehmen im Meklenburgischen bis 1773, da er „abgedankt wurde. Seitdem hält er sich bald zu „Lüneburg, bald zu Wandsbeck auf." Aber in eben dem Jahre da dies gedruckt wurde, starb Tönnies zu Wandsbeck (bey Hamburg) zufolge der Gothaischen gel. Zeitung vom 25. Sept. 1784. *) Folgenden Auszug eines Briefes den ich im März 1782, von einem Freunde erhielt, kann demnach nunmehr nicht anders als unschädlich seyn.

„— Zur Verbesserung der Umstände des Hrn. „Prof. Tönnies, oder zum Absatze seiner Schrif= „ten, wird die Nachricht in dem Lambertschen „Briefwechsel wohl nichts beytragen können. Er „ist ein viel zu sonderlicher Mann. Um das zu be= „weisen, will ich Ihnen ein paar Anecdoten die völ= „lig gewiß sind erzählen. Wie er im Meklenburgi= „schen Prediger geworden, unterließ er, theils bey „der Taufe, theils bey der öffentlichen Sprechung „des Segens, ein Kreuz zu machen, welches dor=

 „ten

*) S. 408. in der Anmerk. hatte ich Tönnies schon für verstorben gehalten, und mich auf Hrn Meusel berufen; dies war aber auf Glauben der 3ten Ausg. des gel. Deutschlands. In dem Nachtrage zu dieser Ausgabe wurde T. wiederum unter die Lebenden gesetzt.

„ten Gebrauch ist. Die Gemeine wird darauf „aufmerksam; sie fragen ob er das mit Fleiß thue; „er erwiedert ja, und werde sich nie dazu verstehen, „ein Kreutz zu machen. Sie klagen also beym Her„zog. Er wird gefordert; der Herzog unterredet „sich selbst mit ihm, frägt warum er kein Kreutz „machen wolle, und erhält zur Antwort, das sey „das Zeichen des Thieres, wovon in der Offenb. „Joh. 13. v. 16. 17. und Cap. 14, 9—11. stünde, „und denen die es machten oder annähmen, die „Verdammniß gedrohet würde. Der Herzog fährt „fort: das ist doch wohl so ganz ausgemacht noch „nicht; und wenn es das wäre, so möchte er seine „Gemeine davon unterrichten und überzeugen, bis „dahin aber sich zu ihrer Schwachheit herablassen. „Da dies aber alles nichts helfen, und die Gemeine „durchaus ihn nicht zum Prediger behalten will: so „bekömmt er seinen Abschied."

„Darauf kam er nach Hamburg, miethete „sich in einem Bauernhause vor Hamburg eine „elende Stube, und behalf sich sehr kümmerlich. „Ich habe ihn in diesem Zustand ein paar Mal „nicht ohne Mitleiden gesprochen, weil er kaum sich „sättigen konnte. Dies bewog verschiedene Freunde, „die am Meklenburgischen Hofe bekannt waren, zu „bitten, ob der Herzog ihm nicht eine Pension aller„gnädigst möchten zufliessen lassen. Ihm wurden „gleich 200 Thaler bewilliget, wenn er nur darum „ansuchen wollte. Was! ich ansuchen? Schul„digkeit des Herzogs ist es; alles will ich drucken „laßen, alles noch so geheimes. Das war die „Antwort, welche er seinen Freunden gab. Er

„wußte

„wußte freylich, da er auf Ludwigslust über Jahr „und Tag gewesen, manche geistliche Betrügereyen, „womit scheinheilige —, den wirklich frommen „Herzog hintergangen und ihren Vortheil erhascht „hatten. *) Seine Freunde wendeten sich also von „neuem an den Herzog und baten in seinem Namen „um eine Pension. Sie wird ihm jährlich von „200 Thlr. bewilliget. Nun soll er einen Em„pfangschein schreiben: daß mir die allergnädigst „bewilligte Pension u. s. w. ausgezahlt. Das „will er schlechterdings nicht. Er besuchte mich „eben damals und erzählte mir den Vorfall: den„ken Sie, sagte er mit grosser Heftigkeit, ich soll „um eine läppische Pension schreiben, allergnä„digst bewilligte. Schuldigkeit ist es; mehr „als das kann ich verlangen. Der Herzog hat sich „endlich so herab gelassen, daß er dem Postsecretair „in Hamburg Ordre gegeben, die Pension halbjäh„rig ihm auszuzahlen, und sich nur einen Post„schein darüber von Herrn Prof. Tönnies unter„schreiben zu lassen. Davon lebt er denn nun!“

*) Daß von der vorigen Regierung die Rede ist, muß ich, wär' es auch nur um eines Lesers willen, erinnern. B.

Zusätze

Zusätze zu dem II. Bande.

E.

Ueber die zwey ersten Bände von Lamberts Briefwechsel überhaupt und insbesondere über den in meine Vorrede zu dem zweyten Bande eingerückten Aufsatz des Hrn. Prof. Müllers, hat mein würdiger Freund, der gelehrte und berühmte Herr Doctor Reccard, Consistorialrath und Professor der G. G. in Königsberg, am 9. Julii 1782, folgendes an mich geschrieben: ich hoffe es werde ihm nicht zuwider seyn, wenn ich es hier abdrucken lasse.

„Lamberts Briefwechsel hat mich sehr vergnügt, zumal da ich nicht nur verschiedene von „denen, mit welchen er correspondirte, persönlich „kenne, sondern er mir auch selbst einige von den „Briefen, die ich hier gedruckt finde, ehemals gezeigt und darüber vieles mit mir gesprochen. Eben „dieses gilt von seinen Religionsmeynungen, in „deren Rücksicht ich nicht weiß, was ich von Hrn. „Müllers Nachrichten darüber denken soll. Lambert wurde in den ersten Tagen nach seiner Ankunft in Berlin zufälliger Weise mit mir bekannt, „und war bis zu meinem Abzuge mein vertrautester „Freund. Er kam gewöhnlicher Weise alle Freytage zu mir, und brachte den ganzen Nachmittag „mit mir zu. Ich habe oft und viel vom Christen-

„thume

„thume mit ihm geredet, aber von dem Commu=
„nionbüchlein weiß ich nichts. *) Er war gewiß
„ein frommer Mann, aber eben so sehr aus Ein=
„sicht als in der That. Ihn als einen Sectirer sich
„vorzustellen, würde eben sowohl Beleidigung für
„ihn als Unwahrheit seyn, ob er gleich sein Reli=
„gionssystem, welches er wohl durchgedacht hatte,
„auch sehr eifrig gegen Widersprecher zu vertheidi=
„gen pflegte. So lange ich ihn gekannt habe, hat
„er nie etwas darin geändert, und an den Geheim=
„nissen des Christenthums nie einen Anstoß genom=
„men. Er pflegte zu sagen, daß er an dem Chri=
„stenthume zweifeln würde, wenn es keine Ge=
„heimnisse hätte, und daß es ein elender Grundsatz
„sey, nichts glauben zu wollen, als was man be=
„greifen könne, welches man doch in so viel andern
„Dingen täglich thun müsse. Die damals anfan=
„genden Neuerungen in der Religion waren ihm
„anstössig, und er unterhielt mich oft mit sehr
„gründlichen Widerlegungen einiger herauskom=
„menden Schriften. Es war ihm freylich etwas
„leichtes, Trugschlüsse zu entdecken, durch welche
„sich vielleicht hundert andere verführen liessen. Ich
„zweifle daher noch sehr daran, daß er nachher an=
„deres

*) Herrn Prof. Müllers angenehm geschriebener Aufsatz mag wohl einige Einschränkung leiden; aber mit dem Communionbüchlein hat es seine Richtigkeit; ich frequentirte damals eben die französische Kirche, an die Lambert sich hielte. Herr Reccard wird nicht Gelegenheit gehabt haben ihn bey der Communion zu beobachten. B.

„deres Sinnes sollte geworden seyn, und wüßte „auch nicht aus welchen Gründen dieses geschehen „seyn sollte. *) Ihr versprechen alles was Sie „unter seinen Schriften auch von Aufsätzen welche „die Religion betreffen, finden drucken zu lassen, „wird zu meinem und vielleicht mehrerer Vergnü„gen in der Erfüllung dienen. **) Denn wer wird „nicht wünschen, er mag nun eine geoffenbarte Re„ligion glauben oder nicht, doch zu wissen, was „**Lambert** darüber gedacht hat. Sollte er, wel„ches ein immer möglicher Fall ist, in einigen Stü„cken auch geirret haben, so sind doch eines so gros„sen Mannes Irrthümer es wohl werth, bekannt „gemacht zu werden. Was mich betrift, so er„warte ich in diesen Aufsätzen viel Wahrheit, wel„che vielleicht noch nie so gut von Theologen als „von **Lambert** gesagt ist, und wenigstens von ihm „gesagt, mehr Eindruck macht.“

*) Wie dies vielleicht ohne eigentliche Gründe, nach und nach kann geschehen seyn, nachdem Herr D. Reccard, schon 1765 oder 1766 Berlin verlassen hatte, findet man in der mehrerwähnten Vorrede von Herrn Müller, und weiter unten in dem Zusatze G. von Herrn Nicolai angezeigt. B.

**) Ich weiß nicht, was ich hierzu sagen soll: ich habe leider schon viel versprochen, welches durch die Gleichgültigkeit des Publicums und andere Umstände in der Erfüllung unmöglich geworden: zum Glücke sind solche litterarische nicht vorausbezahlte Versprechen keine Wechselbriefe. B.

F.

Zu dem Briefe an Hausen, II. S. 56—60.

Von den Wegen die Lambert in seinen philosophischen und mathematischen Untersuchungen, und der Ausfertigung seiner Schriften genommen, findet man lehrreiche Nachrichten und auffallende Spuren in dem itzt auch unter der Presse befindlichen 2ten Bande seiner logischen und philosophischen Abhandlungen (oder Fragmente), und in dem schätzbaren demselben beygefügten Beytrage zu Lamberts Biographie, den der berühmte Philosoph Herr Professor Eberhard in Halle, der Pyrometrie vorgesetzt hat.

In der Note S. 58. 59. habe ich etwas von ein paar unvollendeten Uebersetzungen der cosmologischen Briefe, und in dem Inhalte S. XXV. von Hrn. Merian's gedruckten französischen meisterhaften Auszuge dieses Werkes gesagt. Hier kann ich noch beyfügen, daß der geschickte Astronom Herr Darquier zu Toulouse, die cosmologischen Briefe ganz in das Französische übersetzt hat; sein Manuscript wurde im verwichenen Jahre dem Herrn de la Lande in Paris überschickt, um es daselbst dem Druck zu übergeben.

G.

Zu dem Briefe an J. A. Urlsperger, II. S. 123—126.

Eine Anmerkung in Herrn Nicolai's Beschreibung seiner Reise durch Deutschland und die Schweitz, VIII. B. a. d. 107. 108. S. kann ich hier um so weniger aus der Acht lassen, als sie sich ganz eigentlich auf diesen Brief (vom 18. März 1775) beziehet, und zugleich Herrn Doctor Reccard auf seine Zweifel (oben Zus. E.) zur Antwort und Aufklärung dienet.

„Ich habe, schreibt Herr Nicolai, über die „sogenannte deutsche Gesellschaft zur Beförderung reiner Lehre im VII. Bande S. 91. ff. „freymüthig meine Meynung gesagt. Herr Urlsperger vertheidigt sich darüber in einem Buche: „(Zeugnisse der Wahrheit wichtig und mancherley, 1786. 4.) das ich so eben erhalte." — Dann setzt Herr N. in einer Note folgendes hinzu:

„Herr U. hat in dieser Schrift auch viel mit „seiner jetzt längst vergessenen neu seyn sollenden „Erklärung der Dreyeinigkeit zu thun, und ist übel „zufrieden, daß sie ehemals einem Recensenten in „der A. d. B. nicht hat einleuchten wollen; wie er „denn allenthalben ganz sanftmüthig auf die Neologen schilt, ohne zu bedenken, daß seine eigene „Erklärung ja auch neu seyn sollte. S. 44. führt „er ein Kompliment an, das ihm der seel. Lam-

„bert

„bert 1775 über seine Dreyeinigkeitslehre in
„einem Briefe geschrieben hat. Lambert, (der
„vom VII. Bande an, ein beständiger sehr fleißi=
„ger Mitarbeiter an der allgem. deutschen Bibl.
„war) versichert hier Herrn Urlsperger, daß er
„die theologischen Recensionen in der A. d. B. größ=
„tentheils nicht lese. Hätte Herrn Urlspergern
„nicht also ein Zweifel einfallen können, Lambert
„möchte auch wohl Hrn. Urlspergers neue Drey=
„einigkeitserklärung, die in der That etwas lang
„gerathen ist, nebst den Recensionen derselben, nicht
„gelesen haben. Es könnte leicht seyn! Was Lam=
„bert S. 40. von seinen damaligen Gesprächen mit
„mir erzählt, ist vollkommen richtig. Aber nach meh=
„reren Gesprächen dieser Art, in welchen ich meine
„Gründe auch vortrug, und worin Lambert ge=
„stand: Er habe theologische Materien nicht
„untersucht, und möge sie nicht untersuchen,
„ging es etwas anders. Eben weil er nicht theolo=
„gische Gegenstände untersuchen mochte, hatte
„dieser scharfsinnige Philosoph bis dahin die theo=
„logischen Sätze in seinem Kopfe ruhen lassen,
„wie er sie in seiner Jugend mechanisch gelernt
„hatte. Unsere wiederholten Gespräche gaben aber
„Anlaß, daß er nachher die theologischen Recensio=
„nen in der A. d. B. sehr fleißig zu lesen anfing.
„Er philosophirte nun sehr oft in meiner Gegen=
„wart darüber, und ich hatte das Vergnügen zu
„sehen, wie sich fast jeden Monat seine Ideen auf=
„klärten, und wie sie, obgleich auf einem ihm ganz
„eigenen Wege, den Ideen der theologischen Re=
„censenten in der A. d. B. immer näher kamen.

„Ich zweifle sehr, daß Lambert im Jahr 1777 „einen solchen Brief an Herrn Urlsperger würde „geschrieben haben, als im Jahre 1775.

H.

Zu dem Briefe von L. an Ott. S. 198. 199.

Ueber meine Anfrage wegen Lamberts und Otts ungedruckt gebliebenen meteorologischen Abhandlungen und der darzu gehörenden Zeichnung, hat der verehrenswürdige Herr Chorherr Geßner mich mit einem sehr rührenden und gefälligen Schreiben beehret, von welchem ich ungerne nur das hieher gehörende einrücke.

— — — „Sie können also leicht vermuthen, „wie willkommen mir der beygefügte Lambert„sche Briefwechsel bey dessen Empfang müsse ge„wesen seyn, da er mich — des vortreflichen Lam„berts und mit ihm geflogenen Umganges erin„nert. Ich ermangelte nicht alsobald in den „Schriften unserer physicalischen Gesellschaft nach„sehen zu lassen, was von des sel. Lamberts an „Herrn Ott abgegebenen Schriften vorhanden sey, „um es Ihnen ungesäumt zu übersenden. Aber zu „meiner Bestürzung hat sich von den über des sel. „Herrn Otten von Herrn Lambert gemachten „und mit größtem Fleisse verzeichneten thermometri„schen und meteorologischen Beobachtungen kein „einiger Buchstaben oder Zeichnung gefunden. Und „ist vermuthlich in des unglücklichen Pfarrer W.

„dem

„dem diese Manuscripte anvertraut wurden, hinter-
„lassenen Schriften geblieben, die nun alle unter
„hochobrigkeitlichem Siegel verwahret liegen. Auch
„selbst mangelte bey unserer Gesellschaft Herrn
„Otten Aufsatz, sonst wäre derselbe wirklich von
„der Gesellschaft nebst Lamberts Anmerkungen
„in Druck gegeben worden. Ich machte mir von
„beiden, da Herr Ott noch lebte, einen kurzen Aus-
„zug, und eine Copie von Herrn Lamberts Zeich-
„nung, welche ich Ihnen zusende; jedoch finden Sie
„diese Zeichnung accurater und vollständiger in
„Lamberts Pyrometrie." *)

I.

Zu Jetzlers Briefen an L. II. Band. S. 200—222.

(S. 202.)

Mein Verlangen nach Lamberts Briefen an den Herrn Professor und Rathsherrn Jetzler in Schafhausen konnte bey einem so gefälligen und für die Wissenschaften mit brennendem Ei-

*) S. Tab. VII. Fig. 39. Im Texte beziehen sich auch die 4 od. 5 letzten Seiten 356 bis 360 auf Otts Beobachtungen: es wäre aber noch wohl der Mühe werth, die gedachten Abhandlungen vollständiger bekannt zu machen: nur kann ich mich meines theils itzt nicht dazu verbinden.

B.

ser beseelten Manne nicht ohne Wirkung bleiben; und da er jedem der ihn auch nur aus Lamberts Briefwechsel oder aus den in meiner Anmerkung S. 200. angezeigten Schriften kennet, merkwürdig und achtungswerth seyn muß, so wird man gerne auch einen Theil des Briefes lesen den Herr Jetzler bey Uebersendung der Lambertschen an mich abgelassen hat.

a. Jetzler an Bernoulli.

Schafhausen den 30. April 1782.

Dero werthestes Schreiben machte mir ein überaus großes Vergnügen durch die Gelegenheit, so er mir gab, Euer — ein unendlich kleines Zeichen zu geben von der aufrichtigen Bereitwilligkeit Ihnen mit meinen schwachen Kräften aufzuwarten. Sie empfangen also hier die Abschriften der drey Briefe, die ich von Herrn Lambert erhalten. Mehrere bekam ich von diesem großen Manne nicht; wenigstens finde ich unter meinen Briefen sonst keine. Mein nach Anno 1766 gehabter Beruf hinderte, ja brachte mich sehr von der Mathematik weg. Die Briefe hab ich getreulich mot à mot abgeschrieben. Ob Sie sie nun ganz drucken, oder einiges Besondere weglaßen wollen, steht ganz bey Ihnen. Von meinen meteorologischen Beobachtungen, die ich auf einigen Schweitzerbergen gemacht, ist nichts gedruckt, als was im 3ten Theil der Abhandlungen der physikal. Gesellschaft in Zürich stehet.

Euer

Euer — thun den Liebhabern der Mathematik und Philosophie einen wichtigen Dienst, die Posthuma und den Briefwechsel des Herrn Lamberts, dessen Schriften alle so intereßant sind, ihnen in die Hände zu schaffen. Seiner Zeit werde ich sie auch gebrauchen, und wie ich nicht zweifle, vielen Vortheil daraus ziehen. Dermalen darf ich an keine Lektur gedenken. Euer — werden wohl von Hrn. Spleiß*) gehört haben, daß ich itzt mit Erbauung und Einrichtung eines Waisenhauses beschäftiget bin, welches mir so viele Zeit wegnimmt, und so viele Arbeit und Mühe verursacht, daß ich schlechterdings an eine Erweiterung meiner schwachen Kenntnisse, so sehr sie mir auch am Herzen liegt, nicht denken darf. Meine gewöhnlichen Forstgeschäfte muß ich daneben besorgen, und die, obschon sehr wenig bedeutende Lektionen der ersten Anfänge der Mathematik und Physik auch geben; welches alles so viel Zeit wegnimmt, daß ich meist ausser Stand gesetzt werde, auch nur die mir zugekommenen Briefe zu beantworten. An meinem Waisen-Unternehmen ist mir alles gelegen, und ich muß es, wenn ich zum Zweck kommen will, desto eifriger betreiben, und mir desto mehr angelegen seyn laßen, weil diese Sache hier ziemlich gleichgültig angesehen wird, und fast niemand an diesem

 nöthi-

*) Ein sehr geschickter würdiger Schafhauser, Neffe des verstorbenen Prof. Spleiß (s. II. B. S. 201. die Note). Er hat sich als Hofmeister junger Grafen von Golofkin aus Holland lange in Berlin und Petersburg aufgehalten. B.

nöthigen Werk Theil nimmt. Wäre ich nicht des Werths dieser Sache so sehr überzeugt; hätte ich nicht für alle Mühe und Arbeit, ja Haß und Neid, in jenem Leben eine Belohnung zu gewarten, und wäre es nicht weit das Beste, so ich in meiner Prüfungs und Bestimmungszeit thun kann, so würde ich es nicht unternehmen, wenigstens wegen täglichen und gewissermaßen unaufhörlichen Verdrüßlichkeiten schön lang wieder haben liegen lassen. Wie angenehm, wie süß würde mir dagegen die Mathematik und Physik schmecken! Wie herrlich und schätzbar wäre mir, die physische Astronomie mit den vortreflichen Erweiterungen der Neuern täglich besser zu verstehen! Ja wie erwünscht wäre mir, meine Tage in Berlin zuzubringen, wo ich so viele Gelegenheit hätte in verschiedener großen Leute Umgang täglich zu lernen! Ach, theuerster Herr Professor! tausendmal kümmert es mich, daß ich nicht mehr weiß, und daß meine Kräfte und Umstände meiner Wissensbegierde nicht entsprechen.

Euer — haben Dero Herrn Onkle, und die mathematische Physik ihren grösten Mann verloren. Ach! daß ich doch auch Etwas von dem Geiste dieses großen Mannes hätte erben können! Er war wohl der gröste Liebling der Natur; Ihm entdeckte sie Geheimnisse, wenn andere große Männer sich im Reiche des bloß Möglichen vertieften, und oft mit Hypothesen sich abgaben, wenn Er die Wahrheit berechnete.

---

b. Lambert an Jezler.

Berlin den 29. April 1765.

Ich hab es bis zur Leipziger Messe verschoben, auf Dero wertheste Zuschrift vom 6 Januari *) zu antworten, inzwischen aber von Chur aus längst schon Antwort erhalten. Von Augsburg und Geneve zwar noch nicht. Es hat aber auch nichts zu sagen. Indessen erstatte Euer — für die übernommene Mühe den schuldigsten Dank, und erbiete jede Gegengefälligkeiten um so ehender, da mich meine einmal bestimmtere Umstände an solche Erbietungen denken laßen. Ich habe das Vergnügen, hier bey vielen guten Freunden zu bleiben, einem ungleich einträglicheren Vorschlag von Petersburg aus vorgezogen, wo man mir die beiden Stellen eines Direktors der mathematischen Classe und des Secretärs der Academie nebst den damit verknüpften Einkünften angeboten, welches so viel sagen wollte, als ich solle anders und mehr begehren. Für alles dieses habe ich freilich hier das Aequivalent noch nicht. Indessen wurde versprochen mehr zu thun, unter dem Grunde oder Vorwande einer anfänglichen Probe.

Inzwischen bekam ich alle Hände voll zu thun. Es wurde eine Commission ernannt, die academischen Sachen wieder in besseren Gang zu bringen. Dabey waren nun alle Stücke und Rechnungen zu durch-

*) Dieser Brief hat sich unter Lamberts Nachlaß nicht gefunden.

durchgehen; das Kalender- und Landchartenwesen, den botanischen Garten ꝛc. in bessern Stand zu setzen. Bey allem diesen hatte ich meinen guten Theil Arbeit, und sie ist noch lange nicht zu Ende. Es ist mir aber im geringsten nicht zuwider.

Vor wenigen Wochen erhielte ich einen Brief aus Augsburg, woraus ich abnehmen konnte, man wolle zu München auch wieder anfangen; worauf ich nachgeschrieben: man möchte daselbst nur ein Mittel finden, was mir pränumerationsweise zugesagt war, wirklich zu pränumeriren, und sodann die Punkten anzuzeigen, die sie von mir verlangen.

Ich weiß nicht, ob Euer — die Tafel von den Finsternissen bey mir gesehen haben. Sie wird nun nebst der Beschreibung und einer sehr leichten Berechnung der Finsternisse gedruckt, und verhoffentlich auf der Messe erscheinen. Dieses ist das Einige, was ich seit Dero Abreise von hier in mathematischen Sachen gethan habe, nebst einer Abhandlung von den Bomben, wovon ich bereits zween Theile der Academie, nicht vorgelesen, sondern den Inhalt erzählt habe, weil die Academici besser darauf acht haben konnten. Ich bin damit noch nicht fertig. Es kommt aber dabey die Theorie vom Widerstande der Luft ganz ordentlich in Richtigkeit, und ich habe endlich Mittel gefunden, die Bahn der Bomben durch eine sehr convergente Reihe zu bestimmen. Es zeigt sich auch, daß Herr Euler in seinen vormaligen Abhandlungen darüber die Mühe und Schwierigkeiten vergrößert hat, weil das Quadrat der Geschwindigkeit ausreicht.

Die

Die Bestimmung von der Gewalt des Pulvers welche dem Herrn Euler so sehr fehlgeschlagen, scheint allerdings noch merkliche Schwierigkeiten zu haben. Ich habe aber noch nicht Zeit gehabt, darüber nachzudenken. Vielleicht wenn man mehr Erfahrungen darüber anstellt, läßt sich etwas Brauchbares finden. Die Gravenitzischen Tabellen habe ich merklich abkürzen können, und vielleicht bringe ich die ganze Sache auf einen Caliberstab, welches für die Officiere das beste ist. Sie rechnen nicht gern.

N. S. Meine Empfehlung an Herrn Pfister, den ich zu Pfeffers mit Vergnügen kennen gelernt, und an Herrn Prof. Spleiß, bey welchem ich Anno 1759 die Globos gesehen. — Herr Prof. Spleiß hatte mir damals sehr gute Charten genennt, die er dazu gebraucht hatte, den Globum terrestrem zu zeichnen. Allein ich hab es vergessen. Ersuchen Sie ihn doch, ob er mir es anzeigen wollte oder Ihnen sagen.

c. Lambert an Jetzler.

Berlin den 30. Sept. 1765.

Eine Gelegenheit diesen Brief bis nach Zürich zu bringen, macht, daß ich Dero werthestes Schreiben vom 6ten April *) zu beantworten nicht versäumen solle. Es ist mir dasselbe nebst dem schönen Stücke Schweitzer Käse von Herrn Prof. Sulzer, wie auch der Bayr. Kalender von diesem

*) II. B. S. 200. 201.

Jahr richtig zugestellt worden. Für Alles dieses bleibe ich Ihr Schuldner, und werde Anläße suchen, dafür meinen Dank werkthätig zu zeigen.

Die Langsamkeit der Buchhändler und Drucker allhier machte, daß ich meine beiden Traktätchen erst 3 Wochen nach der Leipziger Messe fertig erhalten habe, und die Uebersetzung des einen wird kaum auf die Herbstmesse fertig. Sonst hätte ich Ihnen gerne im Frühling mit einem Exemplar der Beyträge aufgewartet. Da Sie dieselben nun aber vermuthlich schon haben, so werde nur erwähnen, daß in beiden merklich viele Druckfehler und einige Errores calculi sind: damit Sie sich nicht etwan daran stoßen.

Der Herr Inspector Reccard wird als Prediger und Professor nach Königsberg abgehen.

Sonst ist hier weiter nichts neues vorgefallen. Das academische Kalenderwesen ist verpachtet worden. Es hat mir, nebst einigen anderen Geschäften die Zeit zu arbeiten, ziemlich unterbrochen. Vergangenen Sommer war ich ganz allein bey den Artillerie-Experimenten, weil ich nur die Zeit und Schußweiten für verschiedene Ladung brauchte. Was ich über diese Materie gefunden, habe ich schon einigemal bey der Academie vorgelesen. Und nun kommt die Reihe an die Salzproben, welche ich seitdem anzustellen hatte. Nach und nach denke ich auch wiederum an die Pyrometrie.

---

d. Lam=

d. Lambert an Jetzler.

Berlin den 19. May 1766.

Ihre beide wertheste Schreiben vom 12. September und 29. März, habe ich ganz richtig erhalten, *) und zwar ersteres einige Zeit nachdem ich Ihnen unter dem 30. September bereits geschrieben hatte. —

Um demnach nun ohne Verzug auf beide zu antworten, so erstatte für die durch Herrn Sulzer mir zugestellte barometrische Observationen den verbindlichsten Dank, und bitte auch den werthesten Herrn Pfister, meiner schuldigsten Erkenntlichkeit für den ducrestischen Prospect der Alpgebirge zu versichern, dessen Empfang mir sehr lieb gewesen. Wenn die darin verzeichnete Gletscher zu Aarburg in der That mit Gewißheit kenntlich sind, so kann dieser Prospect zur Berichtigung der Landcharte von der Schweitz dienen. Zur Bestimmung der Höhe dieser Berge dient derselbe nicht, weil man die Distanzen genauer kennen, und zur Observation genauere Instrumente haben müßte.

In Ansehung Ihrer barometrischen Observationen im Appenzeller Land und auf dem Gotthard hätte ich gewünscht, daß Sie durchaus correspondirende Observationen von Zürich gehabt hätten. Es werden dergleichen zu Zürich gemacht, und monatlich gedruckt, so wie auch zu Bern und zu Basel dergleichen angestellt und durch den Druck bekannt gemacht werden. Man erhält sie aber nur spät.

*) S. 202. 204.

spät. Ich habe inzwischen Ihre Observationen mit den hier von Herrn Reccard angestellten verglichen; ich sehe aber daraus, daß der Barometer hier zuweilen früher, zuweilen später gestiegen und gefallen ist, als in der Schweitz.

Da Euer — diesen Sommer ebenfalls solche Beobachtungen anzustellen gedenken, so wünschte ich, 1°. daß Sie an solchen Oertern auch observirten, wo bereits Scheuchzer observirt hatte, weil an Scheuchzers Observationen verschiedenes zu desideriren ist, 2°. daß Sie besonders zu Pfeffers das Barometer oben auf den Felsen brächten, welcher auf der Ostseite der Taminne als eine Wand von 766 Zürcher Fuß oder 709¼ Pariser Fuß über der Taminne steht. Das Barometer müßte gleichfalls bis unten an die Taminne gebracht werden, und vor und nach der Observation oben auf den Felsen. Scheuchzer hat in dieser Gegend zu Ragatz, Vettis, im Bad, auf dem Felsen, im Kloster Pfeffers am Fuß des grauen Harnen, auf Gungels, zu Richenau, zu Chur 2c. observirt 3°. daß während allen solchen Observationen zu Schafhausen oder Zürich 2c. correspondirende gemacht würden, damit man den Unterschied der Höhe des ☿ haben könne, so wie sie zur Zeit einer jeden Observation war. 4°. daß Sie nebst dem Barometer und Thermometer auch das Wetter und den Wind aufzeichnen möchten. Ich wende mich nun zur Beantwortung der analytischen Fragen, die Sie mir vorlegen.

Die

Die Formel $(a+p)^n = a^n \cdot \frac{2a+(n+1)p}{2a+(1-n)p}$ findet sich aus der Binomialreihe

$$z = (a+p)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} p + n \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2} p^2 \text{ \&c.}$$

Wenn man diese mit $1+k \cdot p : a$ multiplicirt, und in dem Product

$$z\left(1+\frac{kp}{a}\right) = a^n + n \cdot a^{n-1} p + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot a^{n-2} p^2 \text{ \&c.}$$
$$+ k\, a^{n-1} p + n \cdot a^{n-2} p^2 \text{ \&c.}$$

das dritte Glied $= 0$ setzt. Dadurch erhält man $-k = \frac{n-1}{2}$. Wird nun dieser Werth von k in dem Producte gesetzt, so ist

$$z\left(1-\frac{(n-1)}{2a} p\right) = a^n + \frac{n+1}{2} \cdot a^{n-1} p + * + \text{ \&c.}$$

und folglich

$$z = \frac{a^n(2a+(1+n)p)}{2a(+(1-n)p)} + * + \text{ \&c.}$$

Die auf * folgende Glieder kann man, wenn p viel kleiner als a ist, mehrentheils weglassen. Man hätte eben so z mit $\left(1+\frac{kp}{a}+\frac{lp^2}{a^2}+ \text{ \&c.}\right)$ multipliciren, und so viel Glieder des Productes $= 0$ setzen können, als Coefficienten k, l, m, &c. zu bestimmen sind. Ew. — sehen auch ohne Mühe, daß man jede Reihe auf diese Art tractiren, und

sie dadurch in Brüche verwandeln kann, die proxime eben den Werth geben.

Die andere Formel $v = \frac{3 \sin v}{2 + \cos v}$ wird leicht construirt. Es sey (Fig. 3) AP auf den Diameter AB senkrecht. AC = CB = BD = 1, und AM = v; so ist AD = 3, QD = 2 + cos v, QM = sin v. Demnach

$$AP = \frac{QM . AD}{QD} = \frac{3 \sin v}{2 + \cos v}.$$

Setzen Sie nun

$$\sin v = v - \frac{1}{2.3} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5} v^5 - \&c.$$

$$\cos v = 1 - \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2.3.4} v^4 - \&c.$$

so dürfen Sie nur die Division vornehmen um zu finden, daß AP von AM sehr wenig differirt.

Die dritte Formel müssen Sie anders verstehen. Sie ist folgende: Wenn der Cosinus des dem Radio gleichen Bogens $= \frac{1}{2}(a + b)$, und der Sinus $= \frac{1}{2}(a - b)\sqrt{-1}$; so ist eines jeden Bogens v sein Sinus $= \frac{1}{2}(a^v - b^v)\sqrt{-1}$, und $ab = 1$. Dabey wird Kürze halber der Sinus negativ genommen, weil man sonst durch $\sqrt{-1}$ dividiren müßte.

Pag. 270. haben Sie ganz richtig differentiirt. Und so werden Sie auch pag. 82. die unterste Formel beym Nachrechnen ändern können. Auf Formeln

meln statt deren ich kürzere Mittel angebe, verwende ich im Rechnen nicht immer alle Sorgfalt. So rechnen Sie pag. 421. 423 auch richtig, wo Sie — in + ändern.

Pag. 389. folgt die 24te Formel aus der 23ten. Ferner folgt die 23te aus der 15ten componendo. Denn aus $tg.\frac{a+b}{2} : tg\frac{a-b}{2} = (\sin a + \sin b)$: $(\sin a - \sin b)$ wird $\left(tg\frac{a+b}{2} + tg\frac{a-b}{2}\right)$: $\left(tg\frac{a+b}{2} - tg\frac{a-b}{2}\right) = 2\sin a : 2\sin b =$ $\sin a : \sin b$; folglich $(tg\,y + tg\,z) : (tg\,y - tg\,z)$ $= \sin(y+z) : \sin(y-z)$.

Die 24te und 25te folgt aus $tg.\,y = 1 : cot.\,y$: Denn da ist $tg\,y : tg\,z = cot\,z : cot\,y$; demnach $(tg\,y \pm tg\,z) : tg\,y = (cot\,z \pm cot\,y) : cot\,z$; oder $(tg\,y \pm tg\,z) : (cot\,z \pm cot\,y) = tg\,y : cot\,z =$ $\sin y . \sin z : \cos y . \cos z$.

Die in der Visirkunst vorkommenden Exempel bey wirklich gemessenen Fässern hat Herr Brander in Augsburg mir mitgetheilt. Ovale Fässer können auf gar vielerley Art oval seyn. Ausser kleinen Essigfäßchen und den Saumlägeln, welche man den Pferden aufbindet, um sie über die Berge zu tragen, habe ich noch keine gesehen. Letztere waren eher polyedra als oval. Sollten zu Schafhausen grosse ovale Fässer verfertiget werden, so würden Ew. — mir einen Gefallen erweisen, wenn Sie

Sie von dem Kieffer erfragen wollten, wie die ovalen Böden gezeichnet werden. Und so würde ich auch, um das Maaß der Länge eines solchen ovalen Bodens, oder um die nach einem kleinen Maaßstabe gezeichnete Figur derselben bitten. Ich vermuthe wohl, daß da die Bötticher von Ellipsen nichts wissen, sie eine ovale aus Circulbögen zusammensetzen werden. Die Kübler machen auch ovale Bütten, welche aber mehrentheils flache Dauben haben, und in so ferne conisch sind. Da man auch Kornhaufen visirt, wobey noch leichter Irregularitäten vorkommen, so sehe ich sehr wohl, daß zu der Visirkunst runder Fässer noch etliche andere Theile hinzukommen können.

Es wird mir ein Vergnügen seyn zu vernehmen, wie es mit dem Bauamte ergangen. Es sollte Ew. — billig angetragen werden, denn das Anhalten reimt sich mit dem Meritiren nicht; und Aemter nach Verdienste austheilen, ist eine Pflicht, um die man sich nicht soll erst bitten lassen ꝛc. Doch in der Welt geht es mehrentheils anders, weil, wer weniger meritirt, den Mangel durchs Bitten und andere Künste zu ersetzen, und öfters auch zu verdecken sucht.

Zu der vorhabenden Reise wünsche ich viel Vergnügen und guten Erfolg.

K.

Zu den Briefen von und an Good, S. 232 u. ff.

Ueber die Briefe, oder vielmehr Beyschlüsse von Good an Lambert und von L. an G. oder eigentlich über meine Anmerkungen S. 232 und 239 hat mir der gelehrte Herr Grillo, Professor bey dem Königl. Cadetten-Corps in Berlin, folgende Erläuterung schriftlich zustellen lassen.

„Das Billet von Good an Lambert, und „des letztern Antwort (deutsch. Briefw. II. B. „S. 232 u. ff.) sind durch Einschluß an mich her „und zurückgesandt worden. Beide gehören ungefähr in das Jahr, in welchem sie stehen, und zwar „in den September. Von der Nachricht die Lambert bereits 1765 an Good gegeben haben will, „weiß ich nichts. Ich glaube daß er irret."

„Good war aus der Schweitz, ein Kaufmann, der sich in Wettin im Saalkreise niedergelassen hatte. Er war ein merkwürdiger und seltener Mann, der durch sich selbst, mitten in der „Provinz, an einem dunkeln Orte, sich ausgebreitete mathematische und physicalische Kenntnisse erworben, und eine schöne und ansehnliche Bibliothek gesammlet hatte. Besonders aber hatte er „viele Einsichten in der Markscheidekunst, in der „er, so wie in der Mathematik viele Schüler gezogen hat, die theils bey den Königl. Bergwerken,

„theils in andern Posten, mit Ruhm und Ehre „stehen. Er ist vor ein paar Jahren gestorben."

„Der Auftrag an Lambert, wegen der Farbenpyramide, war eigentlich in meinem Briefe."

L.

a. Oberreits Zusatz zu seinem Briefe, II. B. S. 366—368. *)

Lamberten brauchte ich wohl keine Figur vorzuzeichnen, als ich ihm meine Art, die Stundenwinkel auf abweichenden Vertical-Sonnenuhren zu berechnen, in meinem Schreiben vom 14. August 1770. zur Beurtheilung vorlegte. Ihm war's ein leichtes, solche Sachen, so zu sagen, aufs halbe Wort zu verstehen. Nun aber, da mein Brief publici juris geworden ist; so möchte manchen Lesern, die dieses Problem interessiren mag, zu dessen besserm Verständniß doch wohl eine Figur nöthig oder dienlich seyn; zumal da die Figur, so in **Kästners Anfangsgründen der Mathematik** (Gnomonik §. 52.) hiezu dienen könnte, so schlecht gerathen ist, daß man die Einbildungskraft gewaltig strapaziren muß, wenn man sich einen deutlichen Begrif davon soll machen können.

Es

*) Die hier folgenden Zusätze L. M. sind wörtlich von des eben so gefälligen als gelehrten und gründlichen Mathematikers Hrn. Ober-Finanzbuchhalters Oberreit handschriftlichen Aufsätzen abgedruckt.

Es sey SHZ (Tab. II.) die Horizontalfläche, TVQ, die auf dem Horizont senkrechte Verticalfläche, und SAQ, die Fläche, die den Aequator vorstellt: so ist CHV die Polhöhe = p, und SCT die Abweichung der Verticalfläche = d, (hier von Mittag gegen Abend.) In QC trift die Aequatorsfläche mit der Verticalfläche zusammen, und in ZC diese letztere mit dem Horizonte. Man ziehe HZ senkrecht auf CZ: so sind HZV, QAV, CQV, TCV und ZCV rechte Winkel. CVQ und CAQ sind die Substylarwinkel, jener = v auf der Verticalfläche, dieser = a auf der Fläche des Aequators. Auf der Substylarlinie VQ senkrecht kömmt der Zeiger QVA zu stehen, und QVA ist also die Zeigerhöhe = s. Nun ist, wenn man HC für den Radius annimmt, CZ = sin d, CV = tang p. Und man hat

1) VC : CZ = sin. tot. : Tang. CVZ.
Oder tang. p : sin. d = 1 : tang. v.
Also tang. v = sin. d. cot. p.

2) sin. VQC : VC = sin. CVQ : CQ.
Oder 1 : tang. p = sin. v : tang. p. sin. v.

3) sin. VQC : VC = sin. VCQ : VQ.
1 : tang. p = cos. v : tang. p. cos. v.

4) sin. VAQ : VQ = sin. AVQ : AQ.
1 : tang. p cos. v = sin. s : tang. p. cos. v sin. s.

5) AQ : CQ = sin. tot. : tang. CAQ.

$$\text{tang p. cos v sin s : tang p. sin v} = 1 : \frac{\text{tang v}}{\text{sin s}} = 1 : \text{tang a}$$

6) $HV : \sin. HZV = HZ : \sin. ZVH$ ($= \sin. s.$)
$\sec. p : 1 = \cos. d : \cos. p. \cos. d.$

Demnach ist für $CVQ = v$, den Substylarwinkel auf der Verticalfläche

$$\text{tang. } v = \frac{\sin. d}{\text{tang. } p}$$

Ferner für $CAQ = a$, den Substylarwinkel auf der Aequatorsfläche,

$$\text{tang. } a = \frac{\text{tang. } v}{\sin. s} = \frac{\sin. d. \cot. p}{\cos. d. \cos. p} = \frac{\text{tang. } d}{\sin. p}$$

Und für $AVQ = s$, die Zeigerhöhe,

$$\sin. s = \frac{\text{tang. } v}{\text{tang. } a}$$

Nun sey $QAS = h$, ein Stundenwinkel im Aequator. Wird die Linie AS verlängert: so schneidet sie die verlängerte Linie ZCD in D; und QVD wird der Stundenwinkel auf der Verticalfläche seyn, $= a \pm h$, oder, wenn $h > a$, $= h \pm a$. Gleichwie nun bey der Horizontalfläche $HC = 1$, $AC = \sin. p$, und, für den Horizontal-Stundenwinkel t, $AC : CS = \sin. \text{tot.} : \text{tang. } CAS$,

oder $\sin. p : \text{tang. } t = 1 : \text{tang. } h$

gemacht wird, so daß man $\text{tang. } t = \sin p. \text{tang. } h$ bekömmt: eben also ist auch auf der abweichenden Verticalfläche $VQ = 1$, $AQ = \sin. s$; und man hat

$AQ : QD = \sin. \text{tot.} : \text{tang. } QAD$;
oder $\sin. s : \text{tang. } H = 1 : \text{tang. } (a \pm h)$.

Folg=

Folglich die Tangente des Stundenwinkels auf der Verticalfläche mit der Subſtylarlinie, oder

Tang. H = ſin. s. tang. (a ± h).

Will man nun aber die Stundenwinkel von der Mittagslinie VC an rechnen: ſo ſind ſolche innerhalb dem Subſtylarwinkel = v — H, und auſſerhalb demſelben = H — v.

Exempel.

Die Polhöhe ſey = 51°. 6′. Die Abweichung einer Mauer von Mittag gegen Abend 40°. Man verlangt die Stundenwinkel für 11 Uhr Vormittags und 1 Uhr Nachmittags.

Weſtl. Abw. 40°. 0′. l. ſin. 9,80807	l. tang. 9,92381
Polhöhe 51. 6. l. tg. 10,09318	l. ſin 9,89112 —
Subſt. W. v, 27°. 25′. l. tg. 9,71489	a = 47°. 9′. l. tg. 10,03269 —
	v = 27. 25. l. tg. 9,71489
	Zeigerhöhe s = 28°. 45′ l. ſin. 9,68220

Subſtyl. Winkel im Aequat.	CAQ = 47°. 9′.
1 Stunde vor u. nach Mittage	CAD = 15. 0.
XI Uhr im Aequator	QAD = 62. 9 = a + h.
I Uhr : : : : : :	= 32. 9 = a — h.

Subſtituirte Polhöhe s, 28°. 45′. l. ſin. 9,68220.	28°. 45′. l. ſin. 9,68220
XI Uhr im Aequat. 62. 9. l. tg. 10,27707.	I Uhr im Aeq. 32. 9. l. tg. 9,79832
Stundenw. m. d. Subſt. Linie. 42. 19. l. tg. 9,95927.	16. 49. l. tg. 9,48052
Subſt. Winkel v = 27. 25.	v = 27. 25.

Stundenw. m. d. Mittagsl.
24°. 54′. um 11 Uhr, und um 1 Uhr = 10°. 36′.

Wenn nun aber mein Problem einer Figur zur Erläuterung bedurft hat: so wird's noch weit mehr die kurze, aber vielfassende Antwort unsers Lamberts über die Anwendung dieser Methode auf geneigte Flächen bedürfen. Und weil, wie er meynte, trigonometrische Formeln hierüber immer noch neu seyn würden: so wollen wir zugleich einen Versuch machen, dergleichen aufzufinden. Ich werde jedoch, um mehrerer Deutlichkeit willen, diese Formeln nur aus der Betrachtung ebener Flächen herleiten, ob sie wohl aus der Betrachtung der Erd-Sphäre, nach Lamberts Anleitung, eben nicht schwerer herzuleiten wären.

Vorerst nun muß ich erinnern, daß eine jede abweichende und zugleich geneigte Fläche auch auf eine bloß abweichende Verticalfläche, unter einer neuen Polhöhe und einer neuen Abweichung, sich reduciren läßt. Dabey fällt aber die Mittagslinie ausserhalb der Vertical-Linie, und macht mit derselben einen gewissen Winkel.

Wir wollen zum Beyspiel eine Fläche CVQ (Tab. III.) annehmen, die von Süden gegen Westen wieder um BCr = 40° = d abweiche, zugleich aber von der Verticalfläche um 16° = r, oder um den Winkel RBD = EFG reclinire oder rückwärts geneigt seyn. Die Polhöhe CRV mag wiederum 51°. 6′ = p seyn. Nun ist hier, wenn CR der Radius ist, Rr wieder der Sinus der Abweichung = sin. d; so wie RB = sec. d, und BC = tang. d ist. Und RCD = q ist der Zusatz zur Polhöhe, so daß CHDq die der geneigten Fläche zugehörige

neue

neue Horizontalfläche ist, und die neue Polhöhe CHV $= p + q$ wird. DRB, DCB, CrB, Bqr, HZC, AQC sind hiebey rechte Winkel. Es ist aber

$$RB : RD = \sin. tot. : tang. RBD,$$

oder $\sec. d : tang. q = 1 : tang. r.$

Demnach ist für RD $= q$, oder die Erhöhung der Polhöhe,

$$tang. q = tang. r : \cos. d,$$

so daß dadurch DCV ein rechter Winkel wird.

Ferner haben wir

$$\sin. RBD : RD = \sin. BRD : BD;$$

das ist: $\sin. r : \frac{tang. r}{\cos. d} = 1 : \frac{1}{\cos. d. \cos. r}$

Und $BD : \sin. BCD = CD : \sin. CBD = BC : \sin. BDC;$ oder

$$\frac{1}{\cos. d. \cos. r} : 1 = \frac{1}{\cos. q} : \frac{\cos. d \cos. r}{\cos. q} = tg. d : \sin. d. \cos. r.$$

Folglich für die neue Abweichung CDB oder CDq $=$ CHZ $= d$, die der geneigten Fläche, als Verticalfläche betrachtet, zukömmt,

$$\sin. d' = \sin. d. \cos. r.$$

Endlich ist

1) $\sin. CrB : BC = \sin. BCr : Br;$

$1 : tang. d = \sin. d : tang. d. \sin. d.$

2) $\sin. Bqr : Br = \sin. rBq : rq;$

$1 : tang. d. \sin. d = \sin. r : tg. d. \sin. d. \sin. r.$

3) $Cr : rq = \text{sin. tot.} : \text{tang. } rCq;$

$$\text{sin. } d : \text{tg. } d.\ \text{sin. } d.\ \text{sin. } r = 1 : \text{tg. } d.\ \text{sin. } r.$$

Und $rCq = MCV = m$ ist der Winkel, den die Mittagslinie CV mit der Vertical-Linie CM macht, dessen Tangente demnach $= \text{tang. } d.\ \text{sin. } r$ ist.

Wird nun aus H die Linie HZ parallel mit DB oder Dq gezogen: so findet sich das Uebrige folgendermaßen, nämlich:

1) Für den Substylarwinkel mit der Mittagslinie $CVQ = v$:

$$\text{sin. } CHR : CR = \text{sin. } CRH : CH;$$

$$\text{sin.}(p+q) : 1 = \text{sin. } p : \frac{\text{sin. } p}{\text{s. }(p+q)}.$$

$$\text{sin. } CZH : CH = \text{sin. } CHZ : CZ;$$

$$1 : \frac{\text{sin. } p}{\text{s. }(p+q)} = \text{sin. } d.\ \text{cos. } r : \frac{\text{s. } p.\ \text{s. } d.\ \text{c. } r}{\text{sin. }(p+q)}.$$

$$\text{sin. tot.} : \text{tg. } CHV = CH : CV$$

$$1 : \text{tg. }(p+q) = \frac{\text{sin. } p}{\text{sin. }(p+q)} : \frac{\text{sin. } p}{\text{cos. }(p+q)}$$

$$CV : CZ = \text{sin. tot.} : \text{tang. } CVZ;$$

$$\frac{\text{sin. } p.}{\text{cos.}(p+q)} : \frac{\text{s. } p.\ \text{s. } d.\ \text{c. } r}{\text{sin. }(p+q)} = 1 : \text{tang. } v.$$

Demnach haben wir

$$\text{tang. } CVQ = \text{tang. } v = \text{sin. } d.\ \text{cos. } r : \text{tg. }(p+q).$$

Ferner

Ferner erhalten wir

2) die Zeigerhöhe ZVH = s durch folgende Analogien:

$$\text{sin.}CHV : CV = \text{sin.}HCV : HV;$$

$$\text{sin.}(p+q) : \frac{\text{sin.}p}{(\text{cos.}p+q)} = 1 : \frac{\text{sin.}p}{\text{s.}(p+q).\text{c.}(p+q)}$$

$$\text{sin.}CZH : CH = \text{sin.}HCZ\ (= \text{s.}CBD) : HZ;$$

$$1 : \frac{\text{sin.}p}{\text{sin.}(p+q)} = \frac{\text{cos.}d\ \text{cos.}r}{\text{cos.}q} : \frac{\text{s.}p.\text{c.}d.\text{c.}r}{\text{s.}(p+q).\text{c.}q}.$$

$$VH : \text{s.}VZH = HZ : \text{sin.}HVZ;$$

$$\frac{\text{sin.}p}{\text{s.}(p+q).\text{c.}(p+q)} : 1 = \frac{\text{s.}p.\ \text{c.}d.\ \text{c.}r}{\text{s.}(p+q).\text{c.}q} : \text{sin.}s.$$

Und damit haben wir

$$\text{sin.}ZVH = \text{sin.}s = \frac{\text{cos.}d.\ \text{cos.}r.\ \text{cos.}(p+q)}{\text{cos.}q}.$$

Endlich brauchen wir noch

3) **Den Unterschied der Zeit, oder den Substylarwinkel auf der Aequatorsfläche** CAQ = a; und der findet sich so:

$$\text{sin.}VQC : VC = \text{sin.}VCQ : VQ;$$

$$1 : \frac{\text{sin.}p}{\text{cos.}(p+q)} = \text{cos.}v : \frac{\text{sin.}p.\ \text{cos.}v}{\text{cos.}(p+q)}.$$

$$\text{sin.}VQC : VC = \text{sin.}CVQ : CQ;$$

$$1 : \frac{\text{sin.}p}{\text{cos.}(p+q)} = \text{sin.}v. : \frac{\text{sin.}p.\ \text{sin.}v}{\text{cos.}(p+q)}.$$

$$\text{ſin. } VAQ : VQ = \text{ſin. } AVQ : AQ;$$

$$1 : \frac{\text{ſ. p. c. v.}}{\text{c. } (p+q)} = \text{ſin. s} : \frac{\text{ſin. p c. v. ſ. s}}{\text{coſ. } (p+q)}.$$

$$AQ : CQ = 1 : \text{tang. } CAQ;$$

$$\frac{\text{ſ. p. c. v. ſ. s}}{\text{coſ. } (p+q)} : \frac{\text{ſ. p. ſ. v}}{\text{c. } (p+q)} = 1 : \text{tang. a.}$$

Dies giebt demnach

$$\text{tang. } CAQ = \text{tang. a} = \frac{\text{tang. v}}{\text{ſin. s}}.$$

Oder, wenn man diesen Winkel durch seinen Sinus ausdrücken will: so hat man

$$AC : \text{ſin. } AQC = CQ : \text{ſin. } CAQ;$$

$$\text{ſin. p} : 1 = \frac{\text{ſ. p. ſ. v}}{\text{c. } (p+q)} : \frac{\text{ſin. v}}{\text{coſ. } (p+q)}.$$

Wenn man aber auch nur die neue Abweichung und neue Polhöhe gefunden hat: so läßt sich das Uebrige wie bey bloß abweichenden Flächen berechnen. Z. E.

Neigung r. 16°.0'. tg. 9,45750	coſ. 9,98284	ſin. 9,44034
Abweich. d. 40.0. coſ. —9,88425	ſin 9,80807	tg. 9,92381
q = 20.31⅓. tg. 9,57325	ſin. 9,79091	tg. 9,36415
Polhöhe p = 51. 6.	d' = 38°.10'	m = 13°.1'
Neue Polhöhe 71.37⅓ = p + q.	Neue Abweichungen	Winkel der Mittagslinie mit der Verticallinie.

Neue Abweich.	38°.10'.	tg.	9,89541	sin. 9,79091	
Neue Polhöhe	71.37⅓.	sin	—9,97726	tg --10,47857	
Untersch. d. Zeit	a. 39.38.	tg.	9,91815	tg. 9,31234	
Substyl. Wink.	v. 11.36	tg.	—9,31234	$v = 11°.36'$	Subst. Winkel mit der Mittagsl.
Zeigerhöhe	s. 14.21.	sin.	9,39419		
				$m = 13.1$	
				$v + m = 24.37.$	Subst. Winkel mit der Verticallinie.

Uebrigens lassen sich die gefundenen Formeln auch in solche verwandeln, worin nur die Werthe von p, d und r befindlich sind. Z. E. da

$$\cos.(p+q) : \cos.q = (1 - tg.p.\,tg.q).\cos.p,$$

und $\tan g.q = \tan g.r : \cos.d$

ist: so löset sich die Formel

$$\sin.s = \cos.d.\cos.r.\cos.(p+q) : \cos.q$$

in folgende auf:

$$\sin.s = (\cos.d - \tan g.p.\tan g.r.)\cos.p.\cos.r.$$

Eben so ist auch

$$\cot.a = \frac{\sin.s}{\tan g.v} = \frac{\cos.d.\cos.r.\cos.(p+q) : \cos.q}{\sin.d.\cos.r.\cot.(p+q)}$$

$$= \frac{\sin.(p+q)}{\tan g.d.\cos.q}.$$

Nun ist

$$\sin.(p+q) : \cos.q = (1 + \cot.p.\tan g.q).\sin.p$$

$$= (c.d + \cot.p.\,tg.r).\sin.p : c.d;$$

Demnach $\cot.a = (\cos.d + \cot.p.\,tg.r).\sin.p : \sin.d.$

Man sieht hieraus, daß die Formel

$$\text{sin. s} = (\text{cos. d} - \text{tang. p. tang. r}). \text{cos. p. cos. r}$$

ganz die nämliche ist, die zur Berechnung der Sonnenhöhen dient, wenn p die Polhöhe ist, und man für r die Declination der Sonne, für d den Stundenbogen, und für s die Sonnenhöhe substituirt. — Gleichergestalt ist auch

$$\text{cot. a} = (\text{cos. d} + \text{cot. p. tang. r}). \text{sin. p} : \text{sin. d}$$

die eigentliche Formel für das Azimuth, wenn p, r und d die vorige Bedeutung haben, und a das Azimuth vorstellt.

Eigentlicher aber, und nach Lamberts der Sache gemäßen Vorstellung, sind dies die Formeln für einen sphärischen Triangel auf unsrer Erde, den man gemeiniglich mit PZS zu bezeichnen pflegt, wobey P den Pol, Z unsern Ort, und S irgend einen andern Ort der Erde vorstellt, und wo also $PZ = 90^\circ - p$, $ZS = 90^\circ - r$, $PZS = 180^\circ - d$, $PS = 90^\circ - s$, und $ZPS = a$ ist. Auch findet sich solchergestalt

$$\text{s. ZPS od. s. CAQ unsrer Figur} = \text{s. a} = \frac{\text{s. d. cos. r}}{\text{cos. s}}.$$

und

$$\text{s. PSZ od. s. CMQ unsrer Fig.} = \text{s.}(v+m) = \frac{\text{s.d. c.p}}{\text{cos. s}}.$$

Zum

Zum Exempel:

90° − PZ = 51°.6′.	tg. 10,09318	cos. 9,79793
90° − SZ = 16.9.	tg. 9,45750	cos. 9,98284
69.11.	cos. 9,55068	2. 0,30103
2) 34.35½		
90° − ½PZS = 20.0 ±		
54.35½.	- - -	sin. 9,91118
14.35½.	- - -	sin. 9,40128
90° − PS = 14°.21′ = s	- -	sin. 9,39426

90° − PS = 14°.21′.	1:c 0,01377	- - - - -	1:c. 0,01377
180° − PZS = 40.0.	s. 9,80807	- - - - -	sin. 9,80807
90° − PZ = 51.6.	c. 9,79793	90° − SZ = 16°.0′.	c. 9,98284
ZSP = 24°.37′.	s. 9,61977	ZPS = 39°.38′.	s. 9,80468

Uebrigens habe ich diese Figuren perspectivisch gezeichnet, und die verschiedenen sogenannten Gränzlinien oder Winkelmesser mit beygefügt, um die hier vorkommenden Winkel desto anschaulicher zu machen. Allenfalls mögen sie nebenher auch als ein kleiner Beytrag zu den praktischen Beyspielen der Lambertischen freyen Perspective angesehen werden; wobey es gut ist, ausser den bereits gefundenen Linien und Winkeln, auch das Maaß der Linie AV zu wissen, welches $= \sqrt{(VC^2 - AC^2)} = \sqrt{\left(\frac{\sin.^2 p}{\cos.^2 (p+q)} - \sin.^2 p\right)} =$ sin. p. tang. (p+q) gefunden wird.

b. L.

b. L. Oberreit an den Herausgeber von Lamberts hinterlassenen Schriften.

Aus dem Zusatze, womit Sie das Resultat meiner Auflösung der lambertischen Aufgabe (Briefe, II. Band, S. 372) zu begleiten sich die Mühe gegeben, sehe ich, daß ich bey dieser Auflösung mit **Lambert** doch wirklich ganz auf einerley Wege gegangen bin; und daß sogar in Ansehung der Form beider Auflösungen keine Verschiedenheit, wie Sie vermutheten, vorwaltet. Nur die scheinbare Weitläuftigkeit des Factors von $\cos.^2 t$, CE + AF. (S. 375. und folg.) mochte ihn bewogen haben, da stille zu stehen, wo ich mich wagte, auch noch die letzten Paar Schritte zu machen. Auch ist es einem Genie, dem die Zeit kostbar seyn muß, genug, den Hauptgang gewiesen zu haben, dessen Nebengängen ein kleinerer Geist hernach selbst weiter nachgehen kann, und der noch Ehre genug davon hat, dem großen Manne nachzuarbeiten.

Die eigentliche Ursache aber, warum ihm die Gleichung nicht sehr abkürzbar vorkommen mußte, scheint in zwey oder drey Schreibe- oder Rechnungs-Fehlern zu liegen. Denn in seiner Gleichung muß D eigentlich seyn = tang. m. tang. d. cos. p, anstatt tang. m. sin. d. cos. p. Ferner sin. p. cos. h + tang. m. sin. h. ist nicht = + C, sondern negatif — C. Endlich ist F = sin. p. sin. h — tang. m. cos. h, anstatt sin. p. cos. h — tang. m. cos. h.

Nach

Nach diesen rectificirten Werthen nun wird

$$CE = - s.p.s.h.c.h - s.^2 h.tg.m + s.^2 p.c.^2 h.tg.m + s.p.s.h.c.h.tg.^2 m.$$

$$+AF = + s.p.s.h.c.h - c.^2 h.tg.m + s.^2 p.s.^2 h.tg.m - s.p.s.h.c.h.tg.^2 m$$

Also $CE + AF = -tg.m.(s.^2 h + c.^2 h) + s.^2 p.tg.m.(c.^2 h + s.^2 h).$

Folgl. ganz kurz $= -tg.m + s.^2 p.tg.m = -c.^2 p\, tg.m.$

Ferner ist $BE = s.h.c.p.tg.d - c.h.s.p.c.p.tg.d.tg.m.$

$$+CD = -s.h.c.p.tg.d.tg.^2 m - c.h\, s.p.c.p.tg.d.tg.m.$$

Also $BE + CD = s.h.c.p.tg.d.(1 - tg.^2 m) - 2.c.h.s.p.cos.p.tg.d.tg.m.$

Oder $= c.h.c.p.tg.d.tg.m[tg.h.(cot.m - tg.m) - 2 s.p].$

Das ist $= +2 c.h.c.p.tg.d.tg.m.(tg.h.cot.2m - s.p).$

Endl. ist $AF - BD = s.p.s.h.c.h - tg.m.c.^2 h + tg.m.s.^2 p.s.^2 h - tg.^2 m.s.p.s.h.c.h - tg.m.tg.^2 d.c.^2 p.$

Oder $= s.p.s.h.c.h.tg.m(cot.m - tg.m) + tg.m.(s.^2 p.s.^2 h - c.^2 h) - tg.m.c.^2 p.tg.^2 d.$

Die Gleichung $(CE + AF).cos.^2 t + (CD + BE).cos.t = AF - BD$ giebt also, wenn mit $CE + AF = -tg.m.cos.^2 p$ durchgehends dividirt wird,

$$cos.^2 t + 2 c.t.(s.p. - cot.2m.tg.h).c.h.tg.d : c.p = tg.^2 d + (1 - tg.^2 h.s.^2 p - 2 cot.2m.tg.h.s.p).c.^2 h : c.^2 p.$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf ein Paar Beyspiele hat mich von ihrer Richtigkeit gänzlich überzeugt. Mehrere Weitläuftigkeit aber zu vermeiden, lasse ich sie weg. — Ich habe Versuche gemacht, bey dieser Aufgabe die Ausdrücke von t zuerst aus den Gleichungen wegzuschaffen, und den Werth von Z unmittelbar zu suchen. Allein da

gerieth ich auf verwickeltere Gleichungen von höhern Graden, die mir nicht viel Hofnung verkündigten, daß sie kürzer als die gefundene für r ausfallen möchten.

Und hiemit könnte ich nun füglich wieder abtreten. Ich will aber doch, da eine Nachlese zum Lambertischen Briefwechsel statt finden soll, es wagen, noch einige Anmerkungen über einige Stellen in **Lamberts** Beyträgen nachzuholen, die wirklich, wenn er länger gelebt hätte, zu einem Theil einer Fortsetzung meines Briefwechsels mit ihm würden Stof gegeben haben, und also gewissermaßen in der That eine Nachlese dieses Briefwechsels vorstellen können. Es sind zwar nur Schüler-Exercitia, die freylich eben nicht den eigentlichen Tiefdenkern, aber doch vielleicht manchen andern Analysten nicht ganz unwillkommen noch unnütze seyn möchten. Und **Lambert** war für alle Arten von Denkern und Lehrlingen gleich lehrreich und herablassend. Auch gebührt billig Ihm der Ruhm oder die Frucht von denen etwanigen Verbesserungen, ꝛc. wozu nur Er auch blos die Veranlaßung gegeben oder den Weg gebahnt hat. Ihnen, Mein Herr, bleibt es übrigens ganz überlassen, eine strenge Musterung darüber zu halten, und davon wegzustreichen oder stehen zu lassen, und halben oder ganzen Gebrauch oder Nicht-Gebrauch davon zu machen, je nachdem Sie Eines oder das Andre gut oder schicklich finden möchten. —

Die Auflösung der Aufgabe in Lamberts Beyträgen zur praktischen Geometrie §. 298. hatte mir

mir immer zu weitläuftig zur Anwendung geschienen. Und nach einigen Versuchen fand ich wirklich, daß sie sich nicht allein sehr abkürzen, sondern auch zugleich mit der Aufgabe §. 257. combiniren ließ. Ich formirte daher aus diesen beiden §. §. folgendes Problem: Fig. 4. „Aus einem Fenster E „sehe ich auf dem Felde eine gerade Straße AD, „und auf derselben eine Person gehen; und ich will „wissen, wie weit sie von mir entfernt ist. Ich „zähle daher ihre Schritte von A bis B, und von B „bis C; oder von B bis C, und von C bis D; oder „auch von A bis B, und von C bis D. In A, B, „C, D stehen Bäume, die ich mir merke, um im „Zählen der Schritte nicht gehindert zu werden. „Ich messe sodann die Winkel AEB, AEC, AED. „Daraus soll ich nun sowohl die Länge vom unabgezählten Stücke Weges, als auch die Entfernungen AE, BE, CE und DE in Schritten finden."

Es sey $AB = m.$ $AEB = a.$
$BC = p.$ $AEC = b.$
$CD = n.$ $AED = c.$

Ferner sey der Winkel $CBE = x$: so ist $BCE = 180^\circ - (b-a) - x$. Desgleichen $ABE = 180^\circ - x$; und $BAE = 180^\circ - AEB - ABE = x - a$. Ferner $DCE = 180^\circ - BCE = (b - a + x)$, und $CDE = 180^\circ - CED - DCE = 180^\circ - (c-b) - (b - a + x) = 180^\circ - (c-a) - x$.

Nun ist $\text{ſ.}\,BEC : BC = \text{ſ.}\,BCE : BE.$

Oder $\text{ſ.}(b-a) : p = \text{ſ.}(180^\circ - b + a - x) : \dfrac{p.(\text{ſ.}\,b - a + x)}{\text{ſin.}(b-a)}.$

Ferner sin. AEB : AB = sin. BAE : BE.

Oder sin. a : m = sin. x—a : $\frac{\text{m. sin.}(x-a)}{\text{sin. a}}$.

Diese zween Ausdrücke für BE geben

[p. s.(b—a). c. x + p. c.(b—a). s. x] : s.(b—a) = [m. s. x. c. a — m. cos. x. sin. a] : sin. a.

Oder p. cot. x = p. cot.(b—a) = m. cot. a — m. cot. x.

Also cot. x = [m. cot. a — p. cot. (b—a)] : (m + p).

Ferner ist sin. BEC : BC = sin. CBE : CE.

Oder sin. (b—a) : p = sin. x : $\frac{\text{p. sin. x}}{\text{sin. }(b-a)}$.

Und sin. CED : CD = sin. CDE : CE.

Oder s. (c—b) : n = s. (180° — c + a — x) : $\frac{\text{n. s. }(c-a+x)}{\text{sin. }(c-b)}$.

Folglich CE = p. s. x : s. (b—a) = n. [s. (c—a). c. x + c. (c—a). s. x] : s. (c—b).

Also p. s.(c—b) = n. s.(b—a). [s.(c—a). cot. x + c.(c—a)].

Hieraus cot. x = $\frac{\text{p. s. }(c-b) - \text{n. s. }(b-a)\text{. c. }(c-a)}{\text{n. sin. }(b-a)\text{. sin. }(c-a)}$

$= \frac{\text{p. sin. }(c-b)}{\text{n. s. }(b-a)\text{. s. }(c-a)} - \text{cot. }(c-a)$.

Folglich hat man für die beyden Wehrte von cot. x,

$\frac{\text{m. cot. a} - \text{p. cot. }(b-a)}{m+p} = \frac{\text{p. s. }(c-b) - \text{n. s. }(b-a)\text{. c. }(c-a)}{\text{n. sin. }(b-a)\text{. sin. }(c-a)}$

Also

Also $mn.\,\cot.\,a\;s.\,(b-a).\,s.\,(c-a) - pn.\,c.\,(b-a).\,s.\,(c-a) = -mn.\,s.\,(b-a).\,c.\,(c-a) - pn.\,s.\,(b-a).\,c.\,(c-a) + p.\,(p+m).\,s.\,(c-b)$.

Oder $mn.\,s.\,(b-a).\,[s.\,(c-a).\,c.\,a + \cos.\,(c-a).\,s.\,a] : s.\,a = p.\,(p+m).\,s.\,(c-b) + pn.\,[s.\,(c-a).\,c.\,(b-a) - c.\,(c-a).\,s.\,(b-a)]$.

Nun ist $s.\,(c-a).\,c.\,a + c.\,(c-a).\,s.\,a = s.\,(c-a+a) = \sin.\,c.$

Und $s.\,(c-a).\,\cos.\,(b-a) - c.\,(c-a).\,s.\,(b-a) = \sin.\,[(c-a)-(b-a)] = s.\,(c-b)$.

Demnach $p.\,(p+m).\,\sin.\,(c-b) + pn.\,\sin.\,(c-b) = mn.\,\sin.\,(b-a).\,\sin.\,c : \sin.\,a$.

Hieraus endlich $p^2 + p.\,(m+n) = mn.\,\sin.\,c.\,s.\,(b-a) : \sin.\,a.\,\sin.\,(c-b)$.

Aus dieser nicht ungeschmeidigen Gleichung läßt sich nun sowohl p, als auch m und n, jedes besonders, bestimmen. Man hat nämlich:

$$m = (p+n) : \left[\frac{n.\,\sin.\,c.\,\sin.\,(b-a)}{p.\,\sin.\,a.\,\sin.\,(c-b)} - 1\right].$$

$$\text{Oder } n = (p+m) : \left[\frac{m.\,\sin.\,c.\,\sin.\,(b-a)}{p.\,\sin.\,a.\,\sin.\,(c-b)} - 1\right].$$

$$\text{Und } p + \tfrac{1}{2}(m+n) = \sqrt{\left[\frac{mn.\,s.\,c.\,s.\,(b-a)}{s.\,a.\,s.\,(c-b)} + \tfrac{1}{4}(m+n)^2\right]}.$$

Der positive Werth der Wurzel giebt die wirkliche Länge des mittlern Theiles BC; der negative

hingegen giebt die negative Länge der ganzen Linie AD.

Sodann findet sich der Winkel CBE aus einer von obigen Gleichungen für cot. x; und daraus dann auch die übrigen Winkel, und die Distanzen AE, BE, CE und DE durch die bekannten einfachen Formeln:

$$\sin. AEB : AB = \sin. BAE : BE = \sin. ABE : AE.$$

Und $\sin. CED : CD = \sin. CDE : CE = \sin. DCE : DE.$

Diese Auflösung läßt sich auch auf die Aufgabe §. 301. obgedachter Beyträge anwenden, wenn nur Ein Standpunkt dabey angenommen wird; nur mit dem Unterschiede, daß dann $\sin. dCE = \sin. 90° + b - a + x) = \cos. (b - a + x)$, und $\sin. CdE = \sin. [90° - x - (c - a)] = \cos. (x + c - a)$ wird, und daher die Gleichung in

$$p^2 + p. [m + n. \cot.(c - b)] = mn. \cos. c. \sin.(b - a) : \sin. a. \sin. (c - b)$$

sich verwandelt.

Eben so wird auch die Auflösung des Problems §. 109. S. 75. der mehrgedachten Beyträge für die Anwendung etwas kürzer, wenn man die dortigen Gleichungen anders tractirt. Es ist nämlich daselbst (Fig. 5)

ADB = a.	AB = A.
BDC = b.	BC = B.
ABC = c.	BD = Z.

BAD = x, Und BCD = 360° — a — b — c — x.

Nun

Nun war $\sin. a : A = \sin. x : Z.$

Und $\sin. b : B = \sin. (360° - a - b - c - x) : Z.$

Also, weil $\sin. (360° - a - b - c - x) = - \sin. a + b + c + x)$, ist

$$Z = A. \sin. x : f. a = - B. f. (a + b + c + x) : f. b.$$

Nun ist $- f. (a + b + c + x) = - f. (a + b + c). \operatorname{cof}. x - c. (a + b + c). \sin. x.$

Folglich $- B. f. a. f. (a + b + c). c. x = A. f. x + B. f. a. c. (a + b + c). f. x.$

Diese mit $- B. f. a. f. (a + b + c). f. x$ dividirt, giebt

$$\cot. x = \frac{A. \sin. b}{- B. \sin. (a + b + c)} - \cot. (a + b + c).$$

Wird nun, wie in dem Falle §. 257, $c = 180°$: so ist ABC eine gerade Linie, und cot. x wird

$$= \frac{A. \sin. b}{+ B. \sin. a. \sin. (a + b)} - \cot. (a + b).$$

Bey dergleichen und einer Menge andern, zumal astronomischen Rechnungen aber sind folgende Formeln, für Anfänger wenigstens, sehr dienlich; und es ist Schade, daß sie in Lamberts XX. Tabelle der Zusätze mangeln. Sie sind zwar nicht unbekannt, aber doch noch nicht allgemein genug bekannt, ob sie gleich aus den bereits bekannten leicht können hergeleitet werden. Nur in Eulers Anal.

 Infinit.

Infinit. habe ich die für die Sinus und Cosinus gesehen.

$\text{sin.}(90^\circ \pm x) = +\text{cos. x.}$	$\text{sin.}(270^\circ \pm x) = -\text{cos. x.}$
$\text{cos.}(90^\circ \pm x) = \mp\text{sin. x.}$	$\text{cos.}(270^\circ \pm x) = \pm\text{sin. x.}$
$\text{tg.}(90^\circ \pm x) = \mp\text{cot. x.}$	$\text{tg.}(270^\circ \pm x) = \mp\text{cot. x.}$
$\text{cot.}(90^\circ \pm x) = \mp\text{tg. x.}$	$\text{cot.}(270^\circ \pm x) = \mp\text{tg. x.}$
$\text{sin.}(180^\circ \pm x) = \mp\text{sin. x.}$	$\text{sin.}(360^\circ \pm x) = \pm\text{sin. x.}$
$\text{cos.}(180^\circ \pm x) = -\text{cos. x.}$	$\text{cos.}(360^\circ \pm x) = +\text{cos. x.}$
$\text{tg.}(180^\circ \pm x) = \pm\text{tg. x.}$	$\text{tg.}(360^\circ \pm x) = \pm\text{tg. x.}$
$\text{cot.}(180^\circ \pm x) = \pm\text{cot. x.}$	$\text{cot.}(360^\circ \pm x) = \pm\text{cot. x.}$

So könnte eben dieselbe Tabelle auch noch mit folgenden Formeln, die in trigonometrischen Verwandlungen oft gute Dienste gethan haben, bereichert werden:

$\text{tg. a} \pm \text{tg. b} = \text{s.}(a \pm b):\text{c. a. c. b.}$	$\text{cot. a} \mp \text{tg. b} = \text{c.}(a \pm b):\text{s. a. c. b.}$
$\text{cot b} \pm \text{cot. a} = \text{s.}(a \pm b):\text{s. a. s. b.}$	$\text{cot. b} \mp \text{tg. a} = \text{c.}(a \pm b):\text{c. a s. b.}$
$1 \pm \text{cot. a. tg. b} = \text{s.}(a \pm b):\text{s. a. c. b.}$	$1 \mp \text{tg. a. tg. b} = \text{c.}(a \pm b):\text{c. a. c. b}$
$\text{tg. a. cot. b} \pm 1 = \text{s.}(a \pm b):\text{c. a. s. b}$	$\text{cot a. cot b} \mp 1 = \text{c.}(a \pm b):\text{c. a. s. b}$

Im zweyten Theile der Beyträge über die Verwandlung der Brüche habe ich, in meinem Exemplare, die Formel §. 56. allgemeiner ausgedrückt; indem ich $p + qx^n$, anstatt $1 + x^n$, $= Z$ setzte, und damit für

$$y = ax^m - bx^{m+n} + cx^{m+2n} - \&c.$$

Dennoch

dennoch ebenfalls eine einförmige Formel erhielt; nämlich

$$y = p \cdot \left[a \cdot \frac{x^m}{(p+qx^n)} + (aq-bp) \cdot \frac{x^{m+n}}{(p+qx^n)^2} + (aq^2 - 2bpq + cp^2) \cdot \frac{x^{m+2n}}{(p+qx^n)^3} + (aq^3-2bpq^2+2cp^2q-dp^3) \cdot \frac{x^{m+3n}}{(p+qx^n)^4} + \&c. \right]$$

Mache ich von dieser Formel die Anwendung auf die Reihe für die Logarithmen: so ist $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $d=\frac{1}{4}$, u. s. w. Desgleichen $m=n=1$. Nun setze ich $p=2$, und $q=\pm 1$: und damit verschwindet das zweyte, vierte, sechste, 2nte Glied der Reihe, so daß man, anstatt der Lambertischen §. 58, die convergentere Reihe erhält:

$$\text{log.}(a \pm x) = l.a \pm 2 \cdot \left[\frac{x}{2a \pm x} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{x}{2a \pm x}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{x}{2a \pm x}\right)^5 + \&c. \right].$$

Der Erfolg dieses Beyspiels bewog mich, in der vorherigen Formel das zweyte Glied überhaupt wegzuschaffen, indem ich $aq-bp=0$, oder $p=a$, und $q=b$ setzte. Und das gab immer noch eine einförmige Formel, nämlich:

$$y = a^2 . \left[\frac{x^m}{a + bx^n} - (b^2 - ac) . \frac{x^{m+2n}}{(a+bx^n)^3} \right.$$

$$- (2b^3 - 3abc + a^2 d) . \frac{x^{m+3n}}{(a+bx^n)^4}$$

$$- (3b^4 - 6ab^2 c + 4a^2 bd - a^3 e) \frac{x^{m+4n}}{(a+bx^n)^5}$$

$$- (4b^5\ 10ab^3 c + 10a^2 b^2 d - 5a^3 be$$

$$\left. + a^4 f) . \frac{x^{m+5n}}{(a+bx^n)^6} - \&c. \right]$$

Diese Methode, unendliche Reihen durch Multiplication mit einerley Factoren in andre convergentere, doch aber einförmige Reihen zu verwandeln, führte mich ferner darauf, zu sehen, was erfolgen würde, wenn ich bey jeder Multiplication solche Factoren, obgleich ungleichförmige, nähme, die allemal das zweyte Glied eines jeden Restes der Reihe aufhöben.

Um also aus der Reihe

$$y = ax^m - bx^{m+n} + cx^{m+2n} - dx^{m+3n} + \&c.$$

das zweyte Glied wegzuschaffen, multiplicire ich sie mit $a + bx^n = p$; und ich habe

$$py = a^2 x^m + (ac - b^2) . x^{m+2n} - (ad - bc) . x^{m+3n}$$
$$+ (ae - bd) . x^{m+4n} - \&c.$$

Ich setze, Kürze halber, $ac - b^2 = a'$, $ad - bc = b'$, $ae - bd = c'$, &c. so ist

$$py - a^2 x^m = a' x^{m+2n} - b' x^{m+3n} + c' x^{m+4n} - d' x^{m+5n} + \&c.$$

Diese restirende Reihe multiplicire ich wieder mit $a' + b'x^n = q$, um deren zweytes Glied ebenfalls $= 0$ zu machen; und ich erhalte

$$pqy - qa^2x^m = a'^2x^{m+2n} + (a'c' - b'^2).x^{m+4n} - (a'd' - b'c').x^{m+5n} + \&c.$$

Setze ich dafür wiederum

$$pqy - qa^2x^m - a'^2x^{m+2n} = a''x^{m+4n} - b''x^{m+5n} + \&c.$$

und multiplicire diesen Rest mit $a''b''x^n - r$: so wird wieder

$$pqry - qra^2x^m - ra'^2x^{m+2n} - a''x^{m+4n} = (a''c'' - b''^2).x^{m+6n} - \&c.$$

Und so weiter, bis die Reihe $= 0$ wird. Damit bekomme ich dann

$$y = \frac{a^2x^m}{p} + \frac{a'^2x^{m+2n}}{pq} + \frac{a''^2x^{m+4n}}{pqr} + \&c.$$

Oder $$y = \frac{a^2x^m}{a + bx^n} + \frac{a'^2x^{m+2n}}{(a + bx^n).(a' + b'x^n)} + \frac{a''^2x^{m+4n}}{(a + bx^n).(a' + b'x^n).(a'' + b''x^n)} + \&c.$$

Diese Reihe ist, wie man sieht, von derjenigen, die Lambert §. 49. durch Divisionen gefunden, zwar in etwas verschieden, giebt aber, wie ich finde, bey der Anwendung (z. E. auf das Beyspiel §. 46.) dennoch das gleiche Resultat. Die Ursache hiervon habe ich jedoch nicht untersucht.

Die Anwendung dieser Formel auf die Reihe für die Logarithmen giebt wieder eine ziemlich regelmäßige Reihe, nämlich:

$$\text{Log.}(a+x) = \text{L.}a + \frac{2x}{2a+x} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{x^3}{a.(a+x).(2a+x)}$$
$$- \frac{1}{3.4.5}\cdot\frac{x^5}{a^2.(a+x)^2.(2a+x)} + \frac{1.2}{4.5.6.7}$$
$$\cdot\frac{x^7}{a^3.(a+x)^3.(2a+x)} - \frac{1.2.3}{5.6.7.8.9}$$
$$\cdot\frac{x^9}{a^4.(a+x)^4.(2a+x)} + \text{\&c.}$$

Oder, wenn A, B, C, rc. die nächstvorhergehenden Glieder vorstellen,

$$\text{Log.}(a+x) = \text{L.}a + \frac{2x}{2a+x} + \text{A}.\frac{x^2}{3.4.a.(a+x)}$$
$$- \text{B}.\frac{2}{4.5}\cdot\frac{x^2}{a.(a+x)} + \text{C}.\frac{2.3}{6.7}\cdot\frac{x^2}{a.(a+x)}$$
$$- \text{D}.\frac{3.4}{8.9}\cdot\frac{x^2}{a.(a+x)} + \text{E}.\frac{4.5}{10.11}\cdot\frac{x^2}{a.(a+x)} - \text{\&c.}$$

Die Regelmäßigkeit dieser verwandelten Reihe rührt daher, weil die Coefficienten der zwey ersten Glieder eines jeden Restes der Reihe immer einander gleich sind. Aber eben dieser Umstand macht, daß diese Reste auch mit $(2a+x)^2$ multiplicirt werden können, wobey die Gleichheit der Coefficienten jeder zwey ersten Glieder ebenfalls sich zeigt, und damit die vorhin schon gefundene Reihe für die Logarith-

garithmen zum Vorschein bringt. Beyde diese Reihen aber scheinen im Convergiren nicht viel von einander unterschieden zu seyn, und man wird es also bey jener erstern können bewenden lassen, zumal da sie keine abwechselnde Zeichen hat.

Uebrigens hätte es keiner Umschweife bedurft, eben diese Reihe zu finden. Vorher schon war sie, nur in andrer Form bekannt gewesen. Denn es ist

$$\text{Log.}\,(b+y) - \text{L.}\,b = \frac{y}{b} - \frac{1}{2}.\frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{3}.\frac{y^3}{b^3} - \frac{1}{4}.\frac{y^4}{b^4} + \&c.$$

$$\text{Und L.}\,b - \text{L.}(b-y) = \frac{y}{b} + \frac{1}{2}.\frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{3}.\frac{y^3}{b^3} + \frac{1}{4}.\frac{y^4}{b^4} + \&c.$$

Also, wie bekannt, $\text{L.}\,(b+y) - \text{L.}\,(b-y) = 2.\frac{y}{b} + \frac{2}{3}\frac{y^3}{b^3} + \frac{2}{5}.\frac{y^5}{b^5} + \&c. = \text{L.}\left(\frac{b+y}{b-y}\right).$

Nun setze man $b+y = a+x.$

Und $b-y = a.$

So ist $2b = 2a+x.$

Und $2y = x.$ Also $2y : 2b = y : b = x : (2a+x).$

Demnach $\text{L.}\,(b+y) - \text{L.}\,(b-y) = \text{L.}\,(a+x) - \text{L.}\,a.$

Und

$$\text{Und } 2.\frac{y}{b}+\frac{2}{3}.\frac{y^3}{b^3}+\frac{2}{5}.\frac{y^5}{b^5}+\&c. = 2.\frac{x}{2a+x}$$

$$+\frac{2}{3}.\frac{x^3}{(2a+x)^3}+\frac{2}{5}.\frac{x^5}{(2a+x)^5}+\&c.$$

Will man indessen diese Reihe doch noch convergenter haben: so nimmt man mit derselben eine nochmalige Verwandlung nach obiger Methode vor; und man wird erhalten:

$$\text{Log.}\,(a+x) = \text{l.}\,a + \frac{6x.(2a+x)}{3.(2a+x)^2-x^2} + A.\frac{28}{45}$$

$$.\frac{x^4}{(2a+x)^2.[7.(2a+x)^2-6x^2]} - B.\frac{33}{49}$$

$$.\frac{x^4}{(2a+x)^2.[33.(2a+x)^2-10x^2]} + \&c.$$

wo A, B, C, &c. wie vorhin, die nächstvorhergehenden Glieder andeuten. — Diese drey Glieder geben, wenn $a = x = 1$ gesetzt wird,

$$\text{Log.}\,2 = \frac{9}{13} + \frac{28}{33345} - \frac{44}{200970315} + \&c.$$

$= 0{,}693147{,}1795$, welcher Werth nur um $0{,}000000{,}0010$ zu klein ist.

Ob nun gleich die Reihen, die vermittelst der oben gefundenen allgemeinen Formel verwandelt werden, an sich schon stark convergiren: so ist es doch rathsamer, diese allgemeine Formel fahren zu lassen, und die vorkommenden Reihen selbst unmittelbar

telbar durch Multiplicationen zu verwandeln. Denn auf diese Art stößt man zuweilen auf ganz besondre Eigenschaften der Reihe und auf Vortheile, die bey der Verwandlung vermittelst der allgemeinen Formel immer versteckt bleiben würden.

c. Ein solcher ausserordentlicher Fall ist mir bey der Reihe für die **Quadratwurzel** vorgekommen. Ich habe mir zwar schon zu Ende des vorigen Jahres die Ehre gegeben, Ihnen, mein Herr, hievon einige flüchtige Nachricht zu ertheilen. *) Allein da ich nach der Zeit noch mehr Merkwürdiges bey dieser Reihe wahrgenommen habe, und aus dem bisher Gesagten zugleich der Gang einigermaßen zu ersehen ist, wie ich Stufenweise zur Untersuchung gedachter Reihe geleitet worden bin: so werden Sie mir ohne Zweifel verzeihen, wenn ich das ganze Verfahren hier nochmals wiederhole; zumal da es höchstbillig ist, **Lamberten** noch im Grabe diejenigen Früchte zuzueignen, die der Geist seiner vortreflichen Schriften erzeugt hat.

Wenn sichs nämlich irgend zuträgt, daß in der vorhergehenden allgemeinen Formel $ac - b^2 = 0$ ist, oder daß man $c = b^2 : a$ setzen kann, und man multiplicirt mit $a + bx^n$: so ist klar, daß dann nicht allein das zweyte, sondern auch das dritte Glied der Reihe $= 0$ werden muß. Eben dies muß auch erfolgen, wenn $4ac = 3b^2$, $4a'c' = 3b'^2$, &c. ist, oder

*) S. Leipziger Magazin zur Naturkunde, Mathematik und Oekonomie. Viertes Stück, 1781. Seite 455, u. folg.

oder $c = \frac{3}{4} . b^2 : a$; $c' = {}_4 b'^2 : a'$, u. s. w. gesetzt werden kann, und wenn man in diesem Falle mit $(a + \frac{1}{2} bx^n)^2$, $(a' + \frac{1}{2} . b'x^n)^2$, &c. multiplicirt. Und gerade diese beiden glücklichen Fälle sind es, die mir bey der Reihe für die Quadratwurzel (zu deren genauern Untersuchung hauptsächlich der besondre Umstand wegen des dritten Gliedes in Lamberts Reihe für dieselbe §. 53. mich gereitzt hatte) aufgestoßen sind, und mir die besonders merkwürdigen Eigenschaften der Reihe und ganz unerwartete Vortheile dabey aufgedeckt haben.

Laßt uns $\sqrt{(a^2 + x)} - a = y$ setzen: so ist bekanntermaßen

$$y = \frac{1}{2} . \frac{x}{a} - \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{x^2}{a^3} + \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6} . \frac{x^3}{a^5}$$
$$- \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6} . \frac{5}{8} . \frac{x^4}{a^7} + \text{\&c.}$$

Wenn nun diese Reihe erstlich mit $4a^2 + x = m$ multiplicirt wird: so hat man

$$my - 2ax = \frac{1}{4 . 2} . \frac{x^3}{a^3} - \frac{3}{4^2 . 2} . \frac{x^4}{a^5} + \frac{9}{4^3 . 2} . \frac{x^5}{a^7}$$
$$- \frac{14}{4^4} . \frac{x^6}{a^9} + \frac{45}{4^5} . \frac{x^7}{a^{11}} - \frac{297}{4^6 . 2} . \frac{x^8}{a^{13}} + \text{\&c.}$$

Schon hier zeigt sichs nun, daß das Product des ersten und dritten Gliedes gleich sey dem Quadrat des zweyten Gliedes, und daß also, wenn

nun

nun mit $4a^2+3x=n$ multiplicirt wird, das zweyte und dritte Glied $=0$ werden. Man erhält nämlich:

$$mny-2nax-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{a}=-\frac{1}{4^3\cdot2}\cdot\frac{x^6}{a^7}+\frac{6}{4^4\cdot2}\cdot\frac{x^7}{a^6}$$

$$-\frac{27}{4^5\cdot2}\cdot\frac{x^8}{a^{11}}+\frac{55}{4^6}\cdot\frac{x^9}{a^{13}}-\text{\&c.}$$

Bey diesem Reste der Reihe zeigt sich der zweyte Fall, daß nämlich das vierfache Product des ersten und dritten Gliedes gleich ist dem dreyfachen Quadrate des zweyten Gliedes, und daß folglich mit $(4a^2+\frac{1}{2}6x)^2=16a^4+24a^2x+9x^2=n^2$ multiplicirt werden muß, um das zweyte und dritte Glied ebenfalls verschwinden zu machen. Damit wird dann

$$mn^3y-2n^3ax-\frac{1}{2}\cdot n^2\cdot\frac{x^3}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{x^6}{a^3}=\frac{1}{4^4}\cdot\frac{x^9}{a^9}$$

$$-\frac{6}{4^5}\cdot\frac{x^{10}}{a^{11}}+\frac{27}{4^6}\cdot\frac{x^{11}}{a^{13}}-\frac{221}{4^7\cdot2}\cdot\frac{x^{12}}{a^{15}}+\text{\&c.}$$

Der nämliche zweyte Fall kömmt hier schon wiederum vor, daß nämlich $4\cdot\left(\frac{1}{4^4}\cdot\frac{27}{4^6}\right)=3\cdot\left(\frac{6}{4^5}\right)^2$. Folglich wird wieder mit $(4a^2+3x)^2=n^2$ multiplicirt; und das giebt

mn⁵y

$$mn^5y - 2n^5ax - \frac{1}{2}.n^4.\frac{x^3}{a} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.n^2.\frac{x^6}{a^3} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{x^9}{a^5} = -\frac{5}{4^5.2}.\frac{x^{12}}{a^{11}} + \frac{30}{4^6.2}.\frac{x^{15}}{a^{13}} - \frac{135}{4^7.2}.\frac{x^{18}}{a^{15}} + \&c.$$

Nimmt man sich die Mühe, und fährt auf solche Art immer weiter fort: so wird man für diese Mühe das besonders Merkwürdige finden, daß die drey ersten Glieder A, B, C jedes folgenden Restes der Reihe beständig sich verhalten, wie $A:B = 3B:4C$; oder $3B^2$ sind beständig $= 4AC$, so, daß also die Reste der Reihe auch beständig mit $(A + \frac{1}{2}Bx)^2 = (4a^2 + 3x)^2$ multiplicirt werden müssen, um das zweyte und dritte Glied eines jeden Restes der Reihe $= 0$ zu machen.

Allein noch nicht genug damit! denn „merkwürdige Eigenschaften sind selten allein," spricht Lambert. Sondern man wird auch mit angenehmer Verwunderung wahrnehmen, daß in der, durch diese fortgesetzten Multiplicationen verwandelten Reihe eben die nämlichen Coefficienten wieder an das Tageslicht hervortreten, wie in der ersten und unverwandelten ursprünglichen Reihe. Denn zuletzt wird

$$y = \frac{2ax}{m} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{anm} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}\frac{x^6}{a^3n^3m} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{x^9}{a^5n^5m} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{5}{8}.\frac{x^{12}}{a^7n^7m} + \&c.$$

Oder

Oder, da $a + \frac{2ax}{4a^2 + x} = \frac{a.(4a^2 + 3x)}{4a^2 + x} = \frac{an}{m}$,

$$y + a = \frac{an}{m} + \frac{1}{2} . \frac{x^3}{anm} - \frac{1}{2} . \frac{1}{4} \frac{x^6}{a^3 n^3 m} + \&c.$$

das ist

$$\sqrt{(a^2 + x)} = \frac{a.(4a^2 + 3x)}{4a^2 + x} + A. \frac{1}{2} . \frac{x^3}{a^2.(4a^2 + 3x)^2}$$

$$- B. \frac{1}{4} . \frac{x^3}{a^2.(4a^2 + 3x)^2}$$

$$+ C. \frac{3}{6} . \frac{x^3}{a^2.(4a^2 + 3x)^2}$$

$$- D. \frac{5}{8} . \frac{x^3}{a^2.(4a^2 + 3x)^2}$$

$$+ \&c.$$

Wobey A, B, C, &c. die nächstvorhergehenden Glieder bedeuten.

Diese Auferstehung oder Wiedergeburt der gleichen Coefficienten verkündigt uns noch mehr Wunderdinge; und wir wollen also nicht dabey stehen bleiben. Wir wollen $my - 2ax = y'$, $an = a.(4a^2 + 3x) = a'$, und $x^3 = x'$ nennen. Damit enthüllt uns diese Reihe eine durchaus vollständige Aehnlichkeit mit der eigentlich ursprünglichen Reihe. Denn da haben wir

$$y' = \frac{1}{2} . \frac{x'}{a'} - \frac{1}{2} . \frac{x'^2}{a'^3} + \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6} . \frac{x'^3}{a'^5} - \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{3}{6} . \frac{5}{8} . \frac{x'^4}{a'^7}$$

$$+ \&c.$$

Diese ganz unerwartete Aehnlichkeit, ladet sie uns nicht ein, und beut sie uns nicht die Gelegenheit dar, die nämliche Operation, woraus diese verwandelte und schon stark convergirende Reihe entstanden ist, mit eben dieser verwandelten Reihe aufs neue zu wiederholen, und ihre Convergenz damit zu verdoppeln? Und können wir nicht auch schon voraus sehen, ohne auf einem Dreyfuß zu stehen, daß, um eben der völlig durchgängigen Aehnlichkeit willen, die neue Reihe, die durch die wiederholte Verwandlung herauskommen muß, eine abermalige vollkommene Aehnlichkeit mit den vorherigen Reihen erhalten wird?

Wir wollen dieser Spur doch nachgehen, und sehen, wohin sie uns am Ende führen wird. Wir wollen obige Reihe y' wieder mit $4a'^2 + x' = m'$, $4a'^2 + 3x' = n'$, u. s. w. auf die Art, wie vorhin, multipliciren. Und da bekommen wir wieder

$$y' = \frac{2a'x'}{m'} + \frac{1}{2}.\frac{x'^3}{a'n'm'} - \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{x'^6}{a'^3n'^3m'} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{3}{6}.\frac{x'^9}{a'^5n'^5m'} - \&c.$$

Wir sehen hieraus, daß die Sache sich immer weiter und ins Unendliche fort so treiben läßt, weil die Aehnlichkeit durch alle Verwandlungen hindurch ewig beständig bleibt. Wir setzen nämlich wieder $m'y' - 2a'x = y''$; $a'n' = a'.(4a'^2 + 3x') = a''$, und $x'^3 = x''$. Damit haben wir abermal

y'' =

$$y'' = \frac{1}{2}\cdot\frac{x''}{a''} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x''^2}{a''^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{x''^3}{a''^5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{x''^4}{a''^7} + \&c.$$

Wir multipliciren diese Reihe nochmals eben so, wie bey den vorigen, mit $4a''^2 + x'' = m''$; $4a''^2 + 3x'' = n''$, u. s. f. und wir erhalten, wie vorher

$$y'' = \frac{2a''x''}{m''} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x''^3}{a''n''m''} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{x''^6}{a''^3n''^3m''} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{x''^9}{a''^5n''^5m''} + \&c.$$

Und siehe da! So gelangen wir endlich zu einer ganz einförmigen, und unter allen am allerschnellesten convergirenden Reihe. Wir haben nämlich:

$$y'' = \frac{2a''x''}{m''} + \&c. = m'y' - 2a'x'.$$

Demnach $y' = \frac{2a'x'}{m'} + \frac{2a''x''}{m''.m'} + \&c. = my - 2ax.$

Und hiemit $y = \frac{2ax}{m} + \frac{2a'x'}{m'.m} + \frac{2a''x''}{m''.m'.m} + \&c.$

Folglich $\sqrt{(a^2 + x)} = a + \frac{2ax}{4a^2 + x} + \frac{2a'x'}{(4a'^2 + x').(4a^2 + x)}$
$+ \frac{2a''x''}{(4a''^2 + x'').(4a'^2 + x').(4a^2 + x)} + \&c.$

Und das wäre also die Reihe, der wir nachspürten, oder auf die wir vielmehr sind geleitet worden. Allein noch sind wir nicht völlig am Ziele! Selbst diese Reihe, so convergent sie auch schon ist, läßt sich gleichwohl noch so enge zusammenziehen, concentriren, vereinfachen, daß man nur ein einziges, und zwar nur das erste Glied, und eine einzige Zahlen-Division bey der Anwendung nöthig hat, um eine Quadratwurzel dennoch so genau und auf so viele Decimal-Stellen zu finden, als man nur verlangen mag.

Denn wir haben schon oben gesehen, daß wir setzen können:

$$a + \frac{2ax}{4a^2 + x} = \frac{a.(4a^2 + 3x)}{4a^2 + x} = \frac{a'}{4a^2 + x}.$$

Ist aber dieses: nun, so ist auch auf gleiche Weise

$$\frac{a'}{4a^2 + x} + \frac{2a'x'}{(4a'^2 + x').(4a^2 + x)} = \frac{a'.(4a'^2 + 3x')}{(4a'^2 + x').(4a^2 + x)}.$$

Setzen wir dafür wiederum $a'' : (4a'^2 + x').(4a^2 + x)$: so wird damit ferner

$$\frac{a''}{(4a'^2 + x').(4a^2 + x)} + \frac{2a''x''}{(4a''^2 + x'').(4a'^2 + x').(4a^2 + x)}$$

$$= \frac{a''.(4a''^2 + 3x'')}{(4a''^2 + x'').(4a'^2 + x').(4a^2 + x)} \text{ u. s. w.}$$

Wir haben demnach, so genau als wirs haben wollen, stufenweise,

Erstlich:

Erstlich:

$$\sqrt{(a^2+x)} = \frac{a.(4a^2+3x)}{4a^2+x} + \frac{x^3}{2a.(4a^2+3x).(4a^2+x)} + \&c.$$

Oder genauer $\sqrt{(a^2+x)} = \frac{a'.(4a'^2+3x')}{(4a'^2+x').(4a^2+x)}$

$$+ \frac{x'^3}{2a'.(4a'^2+3x').(4a'^2+x').(4a^2+x)} - \&c.$$

Noch genauer

$$\sqrt{(a^2+x)} = \frac{a''.(4a''^2+3x'')}{(4a''^2+x'').(4a'^2+x').(4a^2+x)}$$

$$+ x''^3 : 2a''.(4a''^2+3x'').(4a''^2+x'').$$

$$(4a'^2+x').(4a^2+x) - \&c.$$

und so ferner. — Hier giebts also abermalige beständige Aehnlichkeiten, auch in den Summen der Glieder; nur daß der Nenner mit jeder folgenden Formel um einen Factor anwächst.

Das erste Glied dient nun eigentlich für die Quadratwurzel; und das zweyte ist sehr bequem, um vermittelst der Logarithmen einen Ueberschlag zu machen, wie weit man mit dem ersten reicht; auf die Art, wie Lambert den Quadratursuchern und andern (2. B. der Beyträge, S. 154.) gezeigt hat.

Allgemein läßt sich die Formel auch so ausdrücken:

$$\sqrt{(a^2 \pm x)} = a.\left(1 \pm \frac{2x}{4a^2 \pm x}\right).\left(1 \pm \frac{2x'}{4a'^2 \pm x'}\right)$$
$$.\left(1 \pm \frac{2x''}{4a''^2 \pm x''}\right). \; \&c.$$

Um nun aber auch die Stärke und Schnelligkeit der Convergenz ein wenig zu beurtheilen: so laßt uns $a = x = 1$ setzen. Dafür giebt nun die erste Formel $\frac{7}{5} = 1,4$.

Die zweyte $\frac{7\cdot(4\cdot7^2+3)}{5\cdot(4\cdot7^2+1)} = \frac{1393}{985} = 1,414213\ldots$

Die dritte $\frac{1393\cdot(4\cdot1393^2+3)}{5\cdot197\cdot(4\cdot1393^2+1)} = \frac{10812186007}{7645370045}$
$= 1414213,562373,095048,795\ldots$

Die drey letzten Ziffern dieses Werths aber müssen 801, anstatt 795, seyn. Demnach giebt das erste Glied der dritten Formel den Werth von $\sqrt{(1+1)}$ schon bis an die 20 Decimal-Stellen richtig an. — Im Vorbeygehen merke ich an, daß hiernach der Werth von $\sqrt{2}$ in Lamberts Beyträgen über die Verwandlung der Brüche §. 17, desgleichen im I. Bande des Briefwechsels, Seite 26, rectificirt werden muß. Wem daran gelegen ist, die an letzterm Orte aufgeworfene Wettfrage zu entscheiden, der darf nunmehro mit diesen Formeln nur zween Schritte weiter gehen, als ich.

Wenn die aus dem fortlaufenden Bruche

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{\&c.}}}}$$

fliessenden einfachen Brüche $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots$ $\frac{1393}{985}$, &c. von $\frac{1}{1}$ an abgezählt werden: so giebt unsre erste Formel den dritten, die zweyte den 9ten, und die dritte gar erst den 27ten dieser Brüche. Und die dazwischen liegenden Brüche werden alle übersprungen. Hieraus erhellet, daß die Brüche unsrer Formeln dem wahren Werthe der Quadratwurzel in einer geometrischen Progression zueilen, deren Exponente 3 ist. Das bestätigen auch ein Paar Ueberschläge, die ich gemacht habe, wie weit die beiden nächstfolgenden Formeln für $\sqrt{(1+1)}$ reichen möchten. Die eine Ueberschlags-Rechnung will ich hersetzen.

Der Zähler der dritten Formel 10812186007 $= a''.(4a''^2 + 3x'')$ ist $= a'''$. Dessen Logarithme $= 10{,}0339135$. Also L. $4a'''^2 = 20{,}6698870$. — Da hier $3x'''$ und x''', in Ansehung der Tabellar-Logarithmen, gegen $4a'''^2$ verschieden: so ist Log. $4a'''^2$ zugleich auch Log. $(4a'''^2 + 3x'')$, und Log. $(4a'''^2 + x''')$. — Ferner ist der Nenner der dritten Formel 7645370045 $= 5.197.7761797$.

$= (4a^2 + x) . (4a'^2 + x') . (4a''^2 + x'')$. Demnach für das zweyte Glied der vierten Formel:

Log. 2 $= 0,3010300$.
L. $a'''.(4a''' + 3x''') = 30,7038005 =$ L. a''' + L. $(4a'''^2 + 3x''')$
Log. $(4a'''^2 + x''') = 20,6698870$
Log. $(4a''^2 + x'') = 6,8899623 =$ L. 7761797.
Log. $(4a'^2 + x') = 2,2944662 =$ L. 197.
Log. $(4a^2 + x) = 0,6989700 =$ L. 5.

$61,5581160$. Diesen Logarithmen von L. $x''' =$ Log. $1 = 0$

abgezogen, giebt $0,4418840 - 62$.

Also würde das erste Glied der vierten Formel den Werth von $\sqrt{(1+t)}$ schon bis auf 61 Decimal-Stellen richtig angeben; und die fünfte Formel, nach einer ähnlichen Rechnung, vollends bis auf 185 Stellen. Es bleibt also dabey, daß die Anzahl der Decimal-Stellen mit jeder folgenden Formel **dreymal** weiter reicht, als mit jeder nächstvorhergehenden Formel; und daß also die Quadratwurzel ihrem wahren Werthe in cubischem Verhältnisse, so zu sagen, schnell entgegen stürzt. —

d. Und nun noch ein einziges kleines Scherflein zu **Lamberts freyer Perspective**. — In seinem Zusatze zum 33. §. des ersten Theils giebt er verschiedene Anweisungen, die Lage der Linien zu bestimmen, die mit dem Augenpunkt einen sehr grossen Winkel formiren, dessen Grade auf der Horizontallinie sehr weit ausserhalb der Tafel fallen. Allein die angegebenen Methoden sind, wie er selbst

sagt,

sagt, nicht kurz genug bey der Ausübung. Da nun der Fall sehr häufig vorkömmt, daß große Winkel, deren Grade auf der Horizontallinie zu weit hinaus reichen, müssen gezogen werden, und diese Aufgabe also nicht unwichtig ist: so habe auch ich auf ein einfaches Mittel gesonnen, wie die Sache etwan könnte simplificirt werden. Und ich bin endlich auf einen Einfall gerathen, der hiezu, wenigstens mir; der leichteste, bequemste und kürzeste Weg zu seyn scheint.

Fig. 6. Aus P soll eine Linie in den 70ten Grad gezogen werden, oder, welches eben das ist, der Winkel OPK soll $=70^\circ$ werden. — Man ziehe aus einem beliebigen Punkte F (der jedoch mit P auf einerley Grundlinie, und auf derjenigen Seite liegen muß, wohin die gesuchte Linie gezogen werden soll,) Linien in den Augenpunkt O, und in den 45ten Grad in H, rückwärts nach der Seite, wo P liegt. Aus P ziehe man ebenfalls eine Linie in den entgegengesetzten 45ten Grad in R, auf der Seite des gesuchten Winkels. Von R an zähle man so viele Grade rückwärts, als der verlangte Winkel über 45° haben soll, nämlich hier $70^\circ-45^\circ=25$: so trift man auf $45^\circ-25^\circ=90^\circ-70^\circ=20^\circ$. Aus diesem 20ten Grade in B ziehe man durch den Durchschnittspunkt Q, die Linie BQ, bis in C, wo sie FH durchschneidet. Endlich ziehe man aus P durch C die Linie PCK, welches die gesuchte Linie ist.

Der Beweis ist leicht. Denn CAQ, ist $= CAP = 90°$. Und PA ist $= AQ$; also die Winkel $APC = AQC = BQR = 25°$. Folglich auch OPK oder $OPC = OPQ + QPC = 45° + 25° = 70°$.

La Caille giebt folgende Methode an: OP wird bis auf die erste Grundlinie oder den geometrischen Maaßstab in p verlängert. Nun wird $pq = OR = \text{tang.}\,45°$ gemacht, und qr wieder $= BO = \text{tang.}\,(90° - 70°)$. Sodann wird rmO, qO und mR gezogen. Damit ist $PmR = Pmn = 90°$; und $Pm : mn = 1 : \text{tang.}\,mPn$, oder hier $= 1 : \text{tang.}\,20°$. Folglich $OPn = 90° - 20° = 70°$.

Man sieht aber, daß hier doch Abmessungen mit dem Zirkel nöthig sind, die ich nach meiner Art nicht brauche, und blos mit meinem Linial doch eben so kurz zum Zwecke komme.

Auch umgekehrt, wenn eine Linie gegeben ist, die auf dem Horizonte über 45° hinausläuft, läßt es sich eben so leicht finden, in welchen Grad des Horizonts sie verlängert treffen wird. Alle Linien bleiben in diesem Fall eben dieselben. Der ganze Unterschied bestehet nur darin, daß hier der Punkt C gegeben ist, und der Punkt B, oder das Complement des verlangten Winkels zu 90°, gesucht wird; da hingegen vorhin jener gesucht und dieser gegeben war.

Dresden, im Julius 1782.

---

e. Nachschrift, oder, Zusatz zu Seite 381.

In dem Beyspiele, die Theiler einer Zahl zu suchen, das Lambert in seinem Briefe an mich vom 12. Oct. 1770 (II. Band, Seite 381) anführt, habe ich seit dem Abdrucke einen Rechnungsfehler entdeckt, der ein neuer Erfahrungs-Beweis ist, daß, wie Herr von Holland (I. B. S. 322) sagt, durch glückliche Zufälle schon so manchesmal wahre Sätze aus falschen erzeugt worden. Denn dieses Rechnungsfehlers ungeachtet, brachte Lambert daselbst doch das wahre Resultat heraus. Die Sache verhält sich so:

Lambert wollte mir zeigen, wie die Factoren der Zahl $35369 = A$, vermittelst einer der Formeln der V. Tafel seiner Zusätze, nämlich

$$A = 12m \mp 1 = \pm 36a^2 \mp (2b+1)^2,$$
$$12m \mp 5 = \pm \; 4a^2 \mp 9(2b+1)^2,$$

sollten gefunden werden. Er setzt demnach

$$35369 = 2947 \cdot 12 + 5 = 9 \cdot (2b+1)^2 - 4a^2,$$

und sagt dann, dieses gebe erstlich

$$2947 \cdot 12 + 5 = 36b^2 + 18b + 9 - 4a^2.$$

Allein gleich hier steckt das Versehen. Denn bekanntermaßen ist

$$9 \cdot (2b+1)^2 \text{ nicht} = 36b^2 + 18b + 9,$$
$$\text{sondern} = 36b^2 + 36b + 9.$$

Dadurch

Dadurch ändert sich dann die Rechnung, so daß b nicht schlechthin als gerade gesetzt werden kann; wie dies auch der Erfolg a posteriori zeigt, wo $b = 35$ und also ungerade wird. Man bekömmt nämlich

$$9b.(b+1) - a^2 = 2947.3 - 1 = 8840.$$

Weil nun $b.(b+1)$ allemal gerade ist: so muß von $9(b^2+b)$ auch eine gerade Zahl abgezogen werden, um den geraden Rest 8840 zu erhalten. Demnach muß a ebenfalls gerade seyn, und kann $= 2c$ gesetzt werden. Damit wird

$$4c^2 = 9b^2 + 9b - 8840,$$

oder $c^2 = 2b^2 + 2b - 2210 + \frac{1}{4}(b^2+b)$.

Macht man nun $b = 4m + n$:

so erhält man

$$4c^2 = 16.9m^2 + 8.9mn + 9n^2 + 9.4m + 9n - 8840,$$

oder $c^2 = 36m^2 + 18mn + 2n^2 + 9m + 2n - 2210 + \frac{1}{4}(n^2+n)$.

Nun aber ist $n < 4$. Daher kann $\frac{1}{4}(n^2+n)$, und damit auch c^2, keinen Werth in ganzen Zahlen geben, es sey denn

$$n = 0, \text{ oder } n = 3,$$

so daß b entweder $= 4m$, das ist, gerade, oder $= 4m + 3$ das ist, ungerade seyn muß. Substituirt man diese Werthe: so erhält man die beiden Formeln

$$c^2 = 36m^2 + 9m - 2210,$$

und $c^2 = 36m^2 + 63m - 2183$.

Nun

Nun muß c^2 positif seyn; und so kann, wenn a auch nur $= 1$, oder die zweyte Formel

$$36m^2 + 63m = 2184$$

werden sollte, m nicht kleiner als 7 genommen werden. In der That giebt auch diese zweyte Formel, für $m = 8$,

$$c^2 = 36.64 + 63.8 - 2183 = 625.$$

Also $c = 25 = \frac{1}{2}a$. Und $b = 4m + n = 4.8 + 3 = 35$. Folglich $a = 50$, und $2b + 1 = 71$. Und damit findet sich eben so, wie Lambert auf einem verfehlten Wege ebenfalls gefunden hatte,

$$35369 = 9.71^2 - 4.50^2 = (3.71 - 2.50).(3.71 + 2.50) = 113.313.$$

Uebrigens will ich hier doch beyläufig noch anmerken, daß ich die Lücke von 72000 bis 102000, die sich in meinen Factoren-Tafeln von 1—504000 befand, und wovon Lambert (im IV. B. S. 510) Erwähnung thut, selbst noch ausgefüllt, und zu Ende des Jahrs 1780 dem Herrn Professor und Akademicus Schulze zu Berlin zugesandt habe; nebst noch einer Tabelle über den Inhalt der Segmente eines Cirkels (als eine Erweiterung der Lambertischen in seiner Visirkunst §. 56.) auf jeden tausendsten Theil seines Diameters, wenn die ganze Cirkelfläche $= 1$ ist, bis auf 7 Decimalstellen berechnet.

M. Koch

M. Noch ein Paar Fragmente aus Lamberts Briefen an Oberreit.

1.

Berlin den 29. Sept. 1771.

Was die Gauppische Tafel zu Aufreißung einer Parabel betrift: *(a)* so ist sie von der Tab. 41. der Zusätze nicht anders verschieden, als daß diese letztere auf mehrere Decimalstellen gehet. Es kann aber der Gebrauch im Texte angezeigt werden. Für die Ellipsen, Hyperbeln, und andre oft vorkommende krumme Linien aber bleibt noch ganz zu sorgen. *(b)* Die Ephemeriden des P. Hell von 1769 enthalten ebenfalls Tafeln zur Zeichnung der Ellipsen, zum Gebrauch der Entwerfung der Sonnenfinsternisse, wo, wie bey Sonnenuhren, nicht bloß die Ellipsen selbst, sondern die Stunden und Minuten gezeichnet werden müssen.

Was übrigens die Zeichnung der Kegelschnitte überhaupt anlangt: so ist folgende Art sehr allgemein und leicht.

Fig. 7. Die gerade Linie AB soll die Tangente einer Parabel seyn, deren Brennpunkt F ist. Man schneidet aus einem steifen Papier, oder Blech, Holz, Horn, ꝛc. einen beliebigen Winkel FNM, und legt die eine Seite desselben an den Brennpunkt F, so daß die Ecke an einem beliebigen Punkte N der Linie AB anliege. Sodann zieht man NM. Und diese Linie wird ebenfalls eine Tangente der Para-

Parabel seyn. Durch Ziehung mehrerer solcher Tangenten nm bildet sich die Parabel von selbst. Ist FNM ein rechter Winkel: so steht AN auf der Axe AF senkrecht.

Dieses Verfahren habe ich in den Orbitis cometarum als ein Corollarium aus andern Lehrsätzen angezeigt. Ein guter Freund alhier (und zwar derjenige, der die hyperbolischen Logarithmen berechnen will, und auch bereits Vorbereitungen dazu gemacht hat,) gerieth erst vor einigen Monaten auf den Einfall, statt der geraden Linie AB einen Cirkelbogen zu gebrauchen. Der Erfolg gelang gut. Denn, wurde der Punkt F innerhalb dem Cirkel genommen: so wurde AM eine Ellipse, F deren Brennpunkt, und der Mittelpunkt des Cirkels traf in die kleinere Axe. War aber F ausserhalb dem Cirkel: so entstand eine Hyperbel. Die Theorie hievon dehnt sich sehr weit aus. *(c)*

(a) In Johannes Gaupp's mechanischer Sonnenuhrkunst. Lindau, 1708. 4to Tab. XII.

(b) In itzt bemeldter Sonnenuhrkunst finden sich doch auch Tafeln (die 13te und 14te) zu Verzeichnung der Ellipsen und Hyperbeln. Die Ellipsen nach der Formel

$$y = \sqrt{(a^2 - f^2)} . \sqrt{(a^2 - x^2)} : a;$$

wobey die halbe große Axe a = 1,000 angenommen wird, f die halbe Distanz der Brennpunkte,

punkte, und x die Abscissen, vom Mittelpunkt an gerechnet, vorstellt. — Die Hyperbeln sind nach der Formel

$$x = a.\sqrt{\left(\frac{y^2}{f^2 - a^2} + 1\right)} - a$$

berechnet; wobey a die halbe Zwerchachse ist, die halbe Distanz der Brennpunkte f = 1,000 gesetzt wird, und die Abscissen x vom Scheitel an gerechnet werden. — Diese Einrichtung ist zum gnomonischen Gebrauch nicht unbequem. Denn wenn p die Polhöhe, d die Declination der ☉ andeutet: so hat man z. E. für die Hyperbeln auf den Horizontal-Sonnenuhren unsrer Gegenden

$$2f = \text{sec.}(p + d) + \text{sec.}(p - d);$$

$$2a = \text{tang.}(p + d) - \text{tang.}(p - d).$$

Und da läßt sich die halbe Zwerchachse, wenn f = 1 ist, durch die Analogie

$$f : a = 1 : \text{sec.}\, p.\ \text{sin.}\, d$$

reduciren, um damit für jedey den Werth von x aus der Tafel zu bestimmen.

(c) Es wird nicht undienlich seyn, dies artige und leichte Verfahren für die Ellipsen und Hyperbeln ebenfalls in einer oder zwo Figuren vorzustellen. Tiefdenkern wird damit das Vergnügen, dem wichtigern Theile der Theorie selbst nachzuspüren, nicht entzogen werden. Und Schwächern von meinem Schlage wird es immer nicht zuwider seyn, doch einen

Grund

Grund dieser Zeichnungsart vorgestellt zu sehen; wenigstens was den leichtesten und gewöhnlichsten Fall betrift, wo fNM oder FnM $= 90°$ ist. Also, (Fig. 8.) AC = CB ist die halbe große oder Zwerchaxe; FC und fC die halbe Distanz der Brennpunkte; N oder n die Punkte in dem Cirkel, wo der Winkel fNM oder FnM anstößt; M der Berührungspunkt des Kegelschnitts; PM die Ordinate; PT die Subtangente. Nun findet sich beständig, sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel,

$$FT : FM = CT : CN.$$

Oder $fT : fM = CT : Cn.$

Und CN = Cn ist = AC = CB. — Die Asymtote der Hyperbel ergiebt sich, wenn aus F oder f eine Tangente an den Cirkel, und durch das Centrum C eine Linie, die auf dieser Tangente senkrecht stehet, gezogen wird. Die Tangente selbst ist der zugeordneten halben Axe gleich. — Bey der Parabel ist

$$AN = \tfrac{1}{2}PM; \text{ und } FN = \tfrac{1}{2}MR.$$

Dies macht, daß man bey derselben die Aufgabe umkehren, und eine gegebene oder gezeichnete krumme Linie prüfen kann, ob sie eine Parabel sey oder nicht. Man ziehe nämlich aus einem beliebigen Punkte der krummen Linie M auf die Axe AP, parallel mit AB, eine Ordinate PM. Die Hälfte von PM trage man aus A in N, und ziehe NM. Aus N richte man auf MN

eine senkrechte Linie FN auf. Trägt man nun mehrere halbe Ordinaten aus A in n, und richtet auf mn Perpendicularen Fn auf: so muß der Durchschnittspunkt sämtlicher solcher Perpendicularen in Einem Punkt F zusammentreffen, wenn anders die Krümmung wirklich parabolisch ist.

2.

Berlin den 4. May 1772.

Den Gebrauch des hyperbolischen Sectors habe ich in dem Beyspiele §. 99. der Zusätze angezeigt, indem durch dessen Trisection eine Cubikwurzel gefunden wird, die, weil sie die einige wirkliche Wurzel der Gleichung ist, durch die §. 96. erläuterte Trisection eines Cirkelbogens nicht gefunden werden kann. (§. 97.)

Seitdem habe ich über diese Sache bey der Königlichen Akademie eine Abhandlung vorgelesen, die nun in den Mémoires von 1768 abgedruckt ist. *) Ich habe nur von der Kupferplatte einen besondern Abdruck; und diesen lege ich hier bey wegen der 7ten und 8ten Figur, die ich gleich erklären werde.

Fig. 7. (Hier Fig. 9.) HZON der Meridian. HO der Horizont. AE der Aequator. SM ein Parallelkreis der Sonne oder eines Sterns. OM dessen mittägliche Höhe. HS dessen Vertiefung um Mitternacht. AC, CB die Sinus dieser Bögen. AGBF ein

*) Observations trigonométriques &c.

ein auf AB beschriebener und in Stunden getheilter Cirkel. Q ein Punkt für eine beliebige Stunde. TQR, mit dem Horizont parallel durch Q gezogen, giebt RO die Höhe des Sterns zu bemeldter Stunde. FAG der Tagebogen. GBF der Nachtbogen. Und es ist beständig

$$QK = \frac{FQ.\,QG}{AB} = \text{sin. RO. } (a)$$

Daraus läßt sich die Formel S. 417. §. 76. der Beyträge 1ter Theil leicht herleiten. (b)

Es ist aber diese Analogie von keinem Gebrauche, so oft der ganze Cirkel FAGB über dem Horizonte ist. Wenn B in C fällt: so wird der Nachtbogen = 0, Fällt B über C: so ist dieser Nachtbogen nicht bloß = 0, sondern vollends imaginär. Indessen kann die Construction immer gebraucht werden. Nur geht die erstbemeldte Analogie nicht an. Dieses gab mir den ersten Anlaß, genauer nachzusehen, wie sich imaginäre Circular-Functionen in wahre hyperbolische verwandeln.

Fig. 8. (Hier Fig. 10.) Hier ist der Cirkel AB ganz über dem Horizonte. Aus dessen Mittelpunkt ziehe ich DL mit dem Horizonte parallel, und beschreibe die gleichseitige Hyperbel ILV, deren Axe DL, der Mittelpunkt D ist.

Die Sonne oder der Stern sey vom Mittage A bis in a gekommen: so ist aK der Sinus der

Höhe, wie vorhin. Dieser Sinus theilt sich in qt + ck. Und so ist

$DC = ck = \text{sin. hyp. sectoris } LkDL.$

$DT = tq = \text{sin. hyp. sectoris } LqDL.$

Demnach

$aK = \text{sin. hyp. } LkDL + \text{sin. hyp. } LqDL.$

Dieses giebt (Tab. 18.)

$aK = 2 \text{sin. hyp. } \tfrac{1}{2}(LkDL + LqDL). \text{c. hyp. } \tfrac{1}{2}(LkDL - LqDL).$

Da aber hieben $DL = 1$ gesetzt worden: so muß dieser Ausdruck im Verhältniß von CH zu DL vermindert werden.

Exempel.

Die mittägliche Höhe sey $= m$, die mitternächtliche $= s$. Der Stundenbogen $= w$; und $CH = R$: so ist

$CA = R. \text{sin. } m.$

$CB = R. \text{sin. } s.$

Demnach $AB = R. (\text{sin. } m - \text{sin. } s) = 2.$

$$R = \frac{2}{\text{sin. } m - \text{sin. } s} = \frac{1}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(m+s). \text{sin. } \tfrac{1}{2}(m-s)}$$

$$\text{Und } ck = CD = \frac{\text{s. } m + \text{s. } s}{\text{s. } m - \text{s. } s} = \frac{\text{tg. } \tfrac{1}{2}(m+s)}{\text{tg. } \tfrac{1}{2}(m-s)} = \text{s. hyp. } \alpha.$$

$$qt = DT = \text{cos. } w = \text{sin. hyp. } \beta.$$

Dieses giebt nun

$aK = 2. \text{sin. hyp. } \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta). \text{cos. hyp. } \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta).$

Und

Und $\sin. \text{Altit.} = \frac{aK}{R} = 2. \cos. \frac{1}{2}(m+s). \text{ſ}. \frac{1}{2}(m-s).$

$\text{ſ}. \text{hyp}. \frac{1}{2}(\alpha+\beta). \cos. \text{hyp}. \frac{1}{2}(\alpha-\beta).$

Zum Beyspiel.

Ein Stern stehe am Mittage 88°, gegen Mitternacht 12° hoch. (Oder seine Declination sey 50° nördlich, bey einer Aequatorshöhe von 38°.) Und man verlangt seine Höhe um 4 Stunden Sternzeit vor oder nach seiner Culmination zu wissen. Hier ist $m = 88°$; $s = 12°$; $w = 60°$. Dieses giebt

$CD = 1{,}5253748 = ck = \sin. \text{hyp}. \alpha.$

$DT = 0{,}5000000 = qt = \sin. \text{hyp}. \beta.$

Diese Werthe in der 3ten Columne Tab. 32 aufgesucht, geben in der 2ten Columne die Sectoren

$\alpha = 0{,}5249560.$

$\beta = 0{,}2089876.$

Folglich

$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 0{,}3669718.$ $\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 0{,}1579842.$

Diese Werthe wiederum in der 2ten Columne aufgesucht, geben in der

5ten Col. Log. ſ. hyp. $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ =	9,9773521
6ten Col. Log. c. hyp. $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ =	10,0281228
Nun ferner L. c. $\frac{1}{2}(m+s)$ = L. c. 50° =	9,8080675
Log. ſin. $\frac{1}{2}(m-s)$ = L. ſ. 38° =	9,7893420
Log. 2 =	0,3010300
Log. ſin. Altit. =	9,9039144
Giebt die Höhe =	53°. 16′. 31″

 Diese

Diese Art, die hyperbolischen Sinus und Cosinus zu gebrauchen, dient in denen Fällen, wo die circulären nicht angehen; und die Aehnlichkeit des Verfahrens kann beybehalten werden. So z. E. in der 7ten (9ten) Fig. wird DT = sin. β, CD = sin. α gesetzt. Und da sind α, β Cirkelbögen. Hingegen kann in der 8ten (10ten) Fig. CD nicht als ein Sinus eines Cirkelbogens angesehen werden, weil CD > BD ist. Man setzt demnach DT = sin. hyp. β, CD = sin. hyp. α. Und da sind α, β hyperbolische Sectoren. Da ist demnach $\alpha = \text{l.}[CD + \sqrt{(CD^2 + 1)}]$, und $\beta = \log.[DT + \sqrt{(DT^2 + 1)}]$. Der Gebrauch dieser hyperbolischen Sinus geht auch bey der 7ten (9ten) Figur an. (c)

Die 18te Tafel kann unmittelbar aus den zwo ersten Formeln hergeleitet werden. So z. E. ist

$$\text{sin. hyp.}(y \pm z) = \tfrac{1}{2}(e^{y \pm z} - e^{-y \mp z}) = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^z + e^{-z}}{2} \pm \frac{e^y + e^{-y}}{2} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \text{s. hyp. } y. \text{ cos. hyp. } z \pm \text{cos. hyp. } y. \text{ sin. hyp. } z.$$

(a) Oder weil Fr = AB, und die △△ FrQ und QGK einander ähnlich sind,

Fr : FQ = QG : QK.

(b) Denn, es sey der halbe Tagebogen GLQA = FA = φ, und der Stundenbogen AQ = a: so

so ist der Bogen FAQ $=\varphi+a$, und der Bogen QLG $=\varphi-a$. Folglich, in Theilen des Halbmessers DL,

$$FQ = \text{Chord.}(\varphi+a) = 2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+a),$$

$$GQ = \text{Chord.}(\varphi-a) = 2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-a).$$

Ferner sey p die Polhöhe, d die Declination der ☉: so ist ZM $=p-d$, NS $=p+d$. Demnach

$$AC = HC.\,\text{cos.}(p-d),$$

$$BC = HC.\,\text{cos.}(p+d).$$

Also $\tfrac{1}{2}AB = DL = HC.\,[\tfrac{1}{2}\,\text{cos.}(p-d) + \tfrac{1}{2}\,\text{c.}(p+d)]$
$= HC.\,\text{cos.}\,p.\,\text{cos.}\,d.$

Folglich $HC : \tfrac{1}{2}AB = 1 : \text{cos.}\,p.\,\text{cos.}\,d.$

Und damit $\dfrac{\text{sin.}\,RO}{HC} = \dfrac{FQ.\,QG}{2HC} = 2\,\text{s.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi+a)$
$\text{s.}\,\tfrac{1}{2}(\varphi-a).\,\text{cos.}\,p.\,\text{cos.}\,d.$

(c) So sinnreich auch diese Berechnungsart ist: so verursacht doch die Bestimmung der Sectoren rc. die dabey erfodert wird, einen kleinen Ummweg. Ich wähle daher, für ähnliche Fälle, lieber eine einfachere Auflösung, und bleibe bey den circulären Functionen, indem ich sie auf entsprechende Tangenten eines Cirkelbogens reducire. Ich setze nämlich

$$DT = \text{cos.}\,w = \text{tang.}\,LDb = \text{tang}\,A.$$

$$CD = \frac{\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}(m+s)}{\text{tg.}\,\tfrac{1}{2}(m-s)} = \text{tg.d.}\,\text{tg.p} = \text{tg.LDd} = \text{tg.B.}$$

So ist $CT = tg.A + tg.B = \sin.(A+B) : \cos.A.\,c.B.$

Und $\frac{CT}{HC} = \frac{c.p.\,c.d.\,\text{ſ}.(A+B)}{\cos.A.\,\cos.B} = \frac{aK}{R} = \sin.$ Altit.

Die Rechnung selbst wird dann so aussehen:

		Log.	Log.
p =	52°. 0′. 0″	tang. 10,1071902.	coſ. 9,7893420.
d =	50. 0. 0.	tang. 10,0761865.	coſ. 9,8080675.
B =	56. 45. 7,6.	tang. 10,1833767.	$\frac{1}{\cos}$ 0,2610115.
coſ. 60° =	tang. 26. 33. 54,2.	= tg. A. - - -	$\frac{1}{\cos}$ 0,0484550.
A + B =	83. 19. 1,8.	- - - - - -	ſin. 9,9970391.
	Altit.	53°. 16′. 32″.	ſin. 9,9039151.

Auch finde ich nicht, daß die Wurzel aus einer cubischen Gleichung von der Form

$$Z^3 \pm aZ - b = 0,$$

im Fall $b.\sqrt{\frac{27}{a^3}} > 1$ ist, durch die circulären Functionen zu finden, weitläufiger wäre, als durch die hyperbolischen, wenn man sich der Logarithmen bedient. Man mache

$$Z.\sqrt{\frac{3}{a}} = x;$$

So verwandelt sich obige Gleichung in

$$x^3 \pm 3x - b.\sqrt{\frac{27}{a^3}} = 0$$

Und

Und nun giebt die bekannte cardanische Regel

$$x = \left[\sqrt{\left(\frac{27b^2}{4a^3} \pm 1\right)} + \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}\right]^{1:3} \mp \left[\pm\sqrt{\left(\frac{27b^2}{4a^3} \pm 1\right)} \mp \sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}}\right]^{1:3}.$$

Setze ich nun $\sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}} = \text{tang.}\,\varphi$, oder $\sqrt{\frac{27b^2}{4a^3}} = \text{sec.}\,\varphi$: so wird im erstern Falle

$$\sqrt{\left(\frac{27b^2}{4a^3} + 1\right)} = \text{sec.}\,\varphi,$$

im andern Falle

$$\sqrt{\left(\frac{27b^2}{4a^3} - 1\right)} = \text{tang.}\,\varphi.$$

und ich habe demnach

$$x = Z.\sqrt{\frac{3}{a}} = (\text{sec.}\,\varphi + \text{tg.}\,\varphi)^{1:3} \mp (\text{sec.}\,\varphi - \text{tg.}\,\varphi)^{1:3}.$$

Dies giebt nun

$$Z = [\text{cot.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)^{1:3} \mp \text{tg.}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi)^{1:3}].\sqrt{\tfrac{1}{3}a}$$

Die Ausziehung der Cubikwurzel, die hier vorkömmt, soll uns nun keine Mühe machen, wie wir aus Lamberts eignem Beyspiele (Zusätze §. 99.) sogleich sehen werden. Dort ist gegeben

$$Z^3 - 3Z - 4 = 0.$$

Da ist nun $a=3$, $b=4$, $\sqrt{\frac{3}{a}}=1$, und $b.\sqrt{\left(\frac{27}{4a^3}\right)}$ $=2=$ sec. 60° = sec. φ. Demnach

$l.\cot.(45^\circ-\frac{1}{2}.60^\circ)=l.\cot.15^\circ=0{,}5719475.$
Also $\frac{1}{3}.l.\cot.15^\circ=0{,}1906492=l.1{,}5511336.$
Und $\frac{1}{3}l.\tan g.15^\circ=9{,}8093508=l.0{,}6446899.$

Die Summe giebt, wie dort $Z=2{,}1958235.$

N.

Für den IIten Band habe ich (der Herausgeber,) ausser den obigen Stücken nichts erhebliches mehr beyzufügen: hier folget nur noch eine kleine Nachlese.

1. Zu S. 71. u. ff.

Ich wünschte zu vernehmen wo der gelehrte Hr. Kalmar hingekommen ist? In v. Murrs Journal X. B. 260. S. (1781) wird einer Reise des Herrn Kalmar in die Wallachey erwähnet, wo er das Wallachische lernen wollte; es wird aber nicht gesagt in welchem Jahre. Von Kalmars Universal-Sprache hat Lambert ausführlich einen Begriff gegeben in den Nouv. Mémoires de l'Academie 1771. Hist. p. 20. suiv. und in einer Recension die in dem 2ten Band der log. und philos. Abhandl. zu finden ist.

2. Zu

2. Zu S. 262—266.

Eine wichtige Schrift über die Kalenbergischen Wittwen-Casse ist recensirt in Büschings wöchentlichen Nachr. 1782. 18ten Stück.

3. In der allgem. d. Bibl. LIX. B. 1. St. stehet eine Recension des I. und II. B. dieses Briefwechsels: wo insonderheit einige Berichtigungen den würdigen und berühmten Herrn Hofrath Kästner betreffend, bey Lamberts Briefwechsel mit den Hrn. Mayer und Lichtenberg verdienen in Betrachtung gezogen zu werden. Ich habe den Band nicht bey der Hand, sonst würde ich sie selbst ausziehen.

4. Zu S. 494 u. ff.

Der mehrerwähnte von Hrn. Prof. Klügel empfohlene Hr. Zitting, kam hernach in Dienste der Stadt Hamburg, beym Deichwesen zu Ritzebüttel. (Allg. d. Bibl. L. B. 473 S.)

5. Zu S. 505.

Hr. Ziegler soll Landbaumeister zu Zell im Hannöverischen seyn. (Journ. v. u. f. Deutschl. I. Jahrg. Apr. 377 S.)

Zusätze zu dem III. Bande. *)

O.

L. Oberreits Anmerkung zu Seite 277.

Brander, dieser vortreflich geschickte und gelehrte Künstler, fragt Lamberten, (III. B. Seite 277,) wie die absolute Zahl 1,2589..., die dem Logarithmen 0,1000000 entspricht, herausgebracht oder gefunden werde. Auch Herr Good (II. Band, Seite 235,) konnte diesen Werth von $\frac{1}{10}$ Log. 10 nicht herausbringen, und machte daraus gar den Schluß, die gemeinen logarithmischen Tafeln müßten wohl nicht hinlänglich dazu seyn. — Ich finde, daß Lambert seinem Freunde Brander gar nicht, dem Herrn Good aber der eigentlichen Frage nicht gemäß, geantwortet hat; vermuthlich in der Meynung, die Sache sey an sich bekannt genug. Indessen da ein Mann, wie Brander, dem die Mathematik nichts weniger als fremd ist, so fragen kann: so habe ich Ursache zu glauben, daß es mehrere, übrigens geschickte Män-

*) Obschon Lamberts Briefwechsel mit Brander, welcher allein den 3ten Band ausfüllt, auch unter einem eigenen Titel als ein besonderes Werk ausgegeben worden, so habe ich doch nur den hier folgenden Zusatz des fleissigen Herrn Oberreits erhalten. Der berühmte Brander starb, ehe er diesen Band zu Gesichte bekommen konnte.

Männer geben kann, denen eine eigentliche Beantwortung dieser Frage hier nicht unangenehm seyn mag; ob sie gleich Andern hingegen trivial und geringfügig vorkommen wird.

In den logarithmischen Tafeln also findet man freylich die Zahl nicht unmittelbar, die dem Logarithmen 0,1000000 entspricht; weil dieser Logarithme selbst, so wie er da ist, nicht darin gefunden wird. So viel aber sehe ich wohl, daß nach 0,0000000, dem Logarithmen von 1, schon mehr als 0,1000000, nämlich 0,3010300, der Logarithme von 2, folgt; und daß also 0,1000000 der Logarithme einer Zahl seyn muß, die zwischen 1 und 2 fällt.

Um nun aber diese Zahl, die ich n nennen will, genauer zu erfahren: so nehme ich sie 1000 fach. Und also addire ich zu ihrem Logarithmen den Logarithmen von 1000 = 3; so daß ich

$$\text{Log. } 1000\, n = 0{,}1 + 3{,}0 = 3{,}1$$

bekomme. Diesen Logarithmen

$$3{,}1 = 3{,}1000000$$

suche ich unter den Logarithmen der Tausende, das ist, unter denjenigen auf, deren erste oder Kennziffer durchgehends = 3 ist. Und so finde ich diesen Logarithmen zwar nicht genau; aber ich sehe doch, daß

der nächst kleinere 3,0996806 = L. 1258,
der nächst größere 3,1000257 = L. 1259 ist.

Das

Damit habe ich also

$$1000\,n \text{ beynahe} = 1259,$$

$$\text{oder } n \text{ beynahe} = \frac{1259}{1000} = 1{,}259.$$

Ob nun gleich die gemeinen Tafeln nicht weiter reichen, als bis zum Logarithmen von 10000: so kann man doch, wenn man will, die Genauigkeit noch weiter, nämlich bis auf 7 Ziffern, treiben. Gesetzt, ich verlangte in unserm Beyspiele den Werth von n so genau zu wissen, als die Tabellar-Logarithmen ihn anzugeben vermögen: so nehme ich in Gedanken diese Zahl (da sie aus 1 mit 6 Decimalstellen bestehen soll,) 1000000 fach; und ihr Logarithme wäre dann = 6,1000000. Nun wird, wie wir gefunden haben,

$$\begin{array}{l} 6{,}1000257 = \text{Log. } 1259000. \\ \underline{6{,}0996806 = \text{Log. } 1258000.} \end{array}$$

Also die Unterschiede 3451, und 1000.

Und der Logarithme von 1259000 ist um 257 größer, als der vorgegebene von $10^6 n = 6{,}1000000$. Nun findet sich der Proportional-Theil, um welchen 1259000 für Log. $10^6 n$ zu groß ist, durch die Regel:

$$3451 : 1000 = 257 : 74.$$

Folglich ist Log. $10^6 n$ oder

$$6{,}1000000 = \text{L.}(1259000 - 74) = \text{L.}1258926.$$

Demnach Log. $n = 6{,}1 - 6{,}0$ oder

$$0{,}1000000 = \text{Log. } 1{,}258926.$$

Wäre

Wäre aber der Logarithme 0,1000000 — 1 = — 0,9000000 vorgegeben: so wäre die ihm entsprechende Zahl $= \frac{1258926}{10000000} = 0,1258926.$ Und eben so auch

0,1000000 — 2 = — 1,9000000 = Log. 0,01258926.

0,1000000 — 3 = — 2,9000000 = Log. 0,001258926.

Und so weiter.

Uebrigens muß ich für die Besitzer der Branderschen Schriften hier noch anmerken, daß in der Beschreibuug eines Systems von Maaßstäben obgedachte Zahl des Logarithmen 0,1000000 fehlerhaft = 1,257925 angegeben worden; so wie daselbst die Zahl von $\frac{6}{10}$ Log. 10 nicht 3,980072, sondern 3,981072 seyn muß. In Lamberts Briefe an Herrn Brander vom 16. Junii 1770 (Seite 244) sind diese Zahlen ganz richtig angegeben.

Zusätze zu dem IV. Bande. *)

P.

Zu den Briefen des Frhrn. v. Pacassi an den Herausgeber.

(von L. Oberreit.)

Ob ich gleich mit den Tiefen der Integral-Rechnung nicht zu sehr bekannt bin, und mich nur, so zu sagen, an den Eingangs-Pforten derselben ein wenig umgesehen habe: so freuete ich mich doch nicht wenig, als ich in den Briefen des Freyherrn von Pacassi die ganz unerwartete Nachricht fand, daß dieser Herr eine neue und allgemeine Integral-Rechnung erfunden hätte. Aber leider! meine Freude verschwand gar bald, wie Dunst, nachdem ich der Natur des Kunstgriffes, worauf seine ganze Erfindung gebaut ist, ein wenig nachgespürt hatte.

Dieser Kunstgrif besteht nämlich (wie S. 371. uns geoffenbaret wird,) darin, daß, um ein Differential zu integriren, man dasselbe quadriren,

*) Zu der ersten Abtheilung dieses Bandes, welche Lamberts Briefwechsel mit dem Herrn Prälat Felbiger und Herrn Prof. Scheibel enthält, habe ich keine Zusätze, obschon sie auch unter einem eigenen Titel ausgegeben worden.

ren, und mit seinem zweyten Differential das Product oder Quadrat dividiren soll. Z. E. Wenn das Differential dx integrirt werden soll: so ist sein Quadrat $= dx. dx = (dx)^2$, und sein zweytes Differential $= d.(dx) = d^2x$. Folglich hat man, nach dieser Regel,

$$\int dx = \frac{dx^2}{d^2x}.$$

Damit ist nun aber freylich noch nichts zu machen, wenn nicht zugleich diese Formel erst in eine andre verwandelt werden kann, dergestalt, daß dx^2, mit d^2x dividirt, theilbar sey, und x zum Quotienten gebe. Um diese nicht geringe Schwierigkeit aus dem Wege zu heben, dazu weiß der Herr Erfinder flugs Rath zu schaffen, und setzt geradezu

$$dx^2 \text{ sey } = xd^2x.$$

Damit ist nun allerdings die Sache mit Einentmale abgethan. Denn so bekömmt man ganz natürlich

$$\int dx = \frac{dx^2}{d^2x} = \frac{x.\, d^2x}{d^2x} = x.$$

Und wunderbar glücklich trifts zu, daß, wenn ich z. E. xdx nach des Herrn von Pacassi Methode integriren will, die herrliche Hypothese oder Hülfsgleichung

$$dx^2 = xd^2x$$

gleichsam von sich selbst sich darbietet, indem eben diese beiden nämlichen Ausdrücke dabey zum Vor-

 schein

schein kommen; so daß ich auch hier das richtige Integrale nicht verfehlen kann. Es wird nämlich

$$\left.\begin{array}{l} \int x dx = \dfrac{x^2 . dx^2}{dx^2 + x d^2 x} = \dfrac{x^2 . dx^2}{2 dx^2} \\[2ex] \quad\text{oder} = \dfrac{x^2 . x d^2 x}{2 x d^2 x} \end{array}\right\} = \tfrac{1}{2} x^2.$$

Das ist nun Alles recht schön und gut; und noch mehrere Beyspiele hat uns der Herr von Pacassi selbst recht schön und gut vorgerechnet. — Allein die ganze Sache stößt sich nur noch an einem kleinen Umstand. Es ist nämlich nur die einfältige Frage, auf was für einem Fundamente die Grundgleichung

$$dx^2 = x d^2 x$$

beruhe. Doch vermuthlich nicht auf dem Gerathewohl, das einzelne Fälle blind und glücklich hat zutreffen lassen? — In Wolf, aus dessen Quellen Herr von Pacassi, wie er sagt, ebenfalls geschöpft hat, finde ich wenigstens keine Spur eines zureichenden Grundes hievon. Wohl aber finde ich in seinen *Elementis Analyseos Infinitorum* §. 297, daß

$$d(x dx) = dx^2 + x d^2 x,$$

seyn soll; und so auch

$$d.\left(\frac{dx}{x}\right) = (x d^2 x - dx^2) : x^2.$$

Hat nun aber Herr von Pacassi Recht, und ist

$$dx^2 = x d^2 x:$$

so

so hat Wolf Unrecht, daß er zwey Differential-Ausdrücke, die einander gleich sind, von einander abgesondert hält, als wären sie nicht gleich; und er hätte kürzer und besser

$$d(xdx) = 2dx^2, \text{ oder auch } = 2xd^2x,$$

$$\text{so wie } d\left(\frac{dx}{x}\right) = 0 : x^2$$

setzen sollen.

Aber ich fürchte, Wolf mag hier wohl Recht haben. Und was meine Furcht rechtfertigt, und sogar einen Verdacht gegen die Richtigkeit der neuen Integral-Methode bey mir erweckt, ist nicht allein 1) der Umstand, daß beym letzten Beyspiele des Hrn. von Pacassi, No. V. ebenfalls wieder eine willkührliche Gleichung $d^2y^2 = dy.d^3y$, wie aus der Luft gegriffen, und der Auflösung seiner Aufgabe angepaßt, erscheint; da doch (nach Wolf a. a. O.) $d^2y^2 = 2dy.d^2y$ ist; sondern auch 2) das Beyspiel der Integration von $\int ydx$, das Herr von Pacassi, eben nicht zur Empfehlung seiner Methode, anführt. Nach ihm soll nämlich

$$\int ydx = xy - \frac{x^2dy}{dx} + \frac{x^3d^2y}{dx^2} - \&c.$$

seyn; und er giebt vor, dies sey eben die Formel, die sich im I. Bande des Lambertischen Briefwechsels, Seite 104 und 114, für $\int ydx$ befindet. Allein die zu große Vorliebe für seine eigne Erfindung, die gemeiniglich etwas blödsichtig macht, läßt ihn nicht wahrnehmen, daß dort

$$\int y dx = xy - \frac{x^2 dy}{1.2.dx} + \frac{x^3 ddy}{1.2.3.dx^2} - \&c.$$

angegeben wird; und daß die Divisoren 1. 2, 1. 2. 3, 1. 2. 3. 4, u. s. w. die hier vorkommen, nach seiner Methode ganz zurücke bleiben; da sie doch eben so wenig dürfen vernachläßigt werden, als die beständigen Größen bey den Integralien.

Aber noch mehr! Das ganze Gebäude der herrlichen Erfindung droht völligen Einsturz. In dem Beyspiele des Herrn Barons, Seite 369, ist das Quadrat des Differentials $xdx : \sqrt{(a^2 + x^2)}$, durch sein zweytes Differential dividirt, zwar ganz richtig

$$= \frac{x^2 dx^2 . \sqrt{(a^2 + x^2)}}{(a^2 + x^2) . (xddx + dx^2) - x^2 dx^2}$$

Allein wenn nun $dx^2 = xddx$ gemacht wird, und man recht und nicht bloß zu Gunsten einer Lieblings-Hypothese, rechnet: so findet sich diese Formel (ô des Unsterns!)

$$\text{nicht} = \frac{x^3 ddx . \sqrt{(a^2 + x^2)}}{x^3 ddx} = \sqrt{(a^2 + x^2)},$$

sondern

$$= \frac{x^3 ddx . \sqrt{(a^2 + x^2)}}{(a^2 + x^2) . 2xddx - x^3 ddx} = \frac{x^3 ddx . \sqrt{(a^2 + x^2)}}{(2a^2 + x^2) . xddx}.$$

Also wäre $\int \frac{xdx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{x^2 . \sqrt{(a^2 + x^2)}}{2a^2 + x^2}$, anstatt $\sqrt{(a^2 + x^2)}$.

Und so führt uns diese Methode freylich auf ausserordentliche Resultate, wie der Herr Erfinder spricht. Schade nur, daß dergleichen Ausserordentlichkeiten zugleich Unrichtigkeiten sind, und uns nicht dienen können. Und ist's da zu verwundern, wenn diese Erfindung ein ähnliches Schicksal mit den Quadratur-Erfindungen hat?

Um inzwischen zum Ueberfluß doch noch zu zeigen, wie man auf eine leichte Art sich überzeugen kann, daß es eine vergebliche Mühe seyn würde, über eine Integral-Rechnung, auf so sandichte Gründe gebaut, in einer gedruckten Schrift sich noch weitläufiger herauszulassen: so mache man nur die Probe mit solchen Differentialien, deren Integrale Brüche sind, und bey welchen zugleich im Nenner eine Summe oder Differenz von einer beständigen und einer veränderlichen Größe, oder eine Wurzel einer solchen Summe oder Differenz, vorkömmt. Man nehme z. E. das Beyspiel

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} \text{ oder } = \frac{1}{1-x}.$$

Anstatt dieser wahren und sehr einfachen Integrale erhält man nach der Pacassischen Methode

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{dx^2 : (1-x)^4}{[(1-x)ddx + 2dx^2] : (1-x)^3}$$

$$= \frac{x}{(1+x).(1-x)}$$

Allein das Differential von $\frac{x}{1-x^2}$ ist $= \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \cdot dx$, und sollte doch wieder $= dx : (1-x)^2$ werden.

Und damit wäre dann nicht allein die Nicht-Allgemeinheit, sondern auch die Unrichtigkeit der belobten Universal-Regel zu integriren, nochmals à posteriori erwiesen.

* * *

Nachdem ich dieses schon geschrieben hatte, bekam ich eine kleine Abhandlung von Eulern zu sehen, (in den Mém. de l'Acad. de Berlin, de 1756) worin er ein Paar paradoxe Sätze aus dem Integral-Calcul anführt, nämlich: 1) daß es Fälle gebe, wo sich das Integral schwerlich anders als durch ein zweytes Differentiiren finden lasse; und 2) daß in einer Differentialformel mehrere Integralien enthalten seyn könnten, als man durch die gemeine Integral-Methode erhielte. Das könnte nun der Pacassischen Erfindung günstig zu seyn scheinen, wenn seine Methode sich nicht, wie wir oben gesehen, auf mehr als Eine Art schon verdächtig gemacht hätte. Allein Euler giebt sein Verfahren für nichts weniger als allgemein aus; sondern er sagt, es fände nur statt, wenn gedachte beiden Umstände zugleich beysammen sich fänden. — Curiosität halber will ich doch eins seiner Beyspiele von dieser Art zu integriren anführen. Er hat z. E. die Differentialformel

y —

$$\left(y - \frac{xdy}{dx}\right) \cdot \left(y - \frac{xdy}{dx} + \frac{2ady}{dx}\right) = c^2$$

zu integriren. Um sowohl diese Formel einfacher, als vornehmlich das nachmalige zweyte Differentiiren leichter zu machen, setzt er

$$dy = pdx,$$

wobey p natürlicherweise ebenfalls veränderlich ist. Und damit verwandelt sich die Formel in

$$(y - px).(y - px + 2ap) = c^2,$$

oder $y^2 + 2(a - x)py - 2ap^2x + p^2x^2 = c^2$.

Um den Werth von y zu erhalten, ergänzt er das Quadrat, und macht

$$[y + (a - x)p]^2 = y^2 + 2(a - x)py + (a - x)^2p^2$$
$$= c^2 + a^2p^2.$$

Hieraus ist die Quadratwurzel

$$y = \sqrt{(c^2 + a^2p^2)} - (a - x)p.$$

Nun wird diese Gleichung nochmals differentiirt:

$$dy = \frac{a^2pdp}{\sqrt{(c^2 + a^2p^2)}} - (a - x)dp + pdx.$$

Hier kömmt nun im ersten Gliede der Gleichung py, und im andern pdx vor. Oben aber ward dy = pdx angenommen. Folglich heben sich diese Werthe gegen einander auf; und man hat

$$o = \frac{a^2pdp}{\sqrt{(c^2 + a^2p^2)}} - (a - x)dp,$$

oder, mit dp dividirt

$$a - x = \frac{a^2p}{\sqrt{(c^2 + a^2p^2)}}.$$

 Dies

Dies giebt dann auch

$$y = \sqrt{(c^2 + a^2p^2)} - \frac{a^2p^2}{\sqrt{(c^2+a^2p^2)}} = \frac{c^2}{\sqrt{(c^2+a^2p^2)}}.$$

Wird nun aus diesen letztern beiden Gleichungen p weggeschafft: so ergiebt sich das Integral

$$a^2y^2 = c^2 . (2ax - xx).$$

Diese Integration mag nun auch auf Pacassische Manier versucht werden; oder auch nur mit dem noch leichtern Beyspiel

$$ydx - xdy = a . \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

Anmerkung des Herausgebers.

Ich maaße mir nicht an tantas componere lites; sondern bemerke nur, daß des Freyherrn v. Pacassi neue Methode auch bey andern Sachverständigen ihr Glück nicht gemacht hat, ohnerachtet er sie seitdem in einer eigenen Schrift: Abhandlung über eine neue Methode zu integriren, Wien 1785. 8. und in einem in die physicalischen Arbeiten der einträchtigen Freunde zu Wien, 2ter Jahrg. 1786. eingerückten Versuch einer neuen Methode zu integriren, weiter ausgeführet hat. (Vergl. die Götting. gel. Anz. 1786. 609 S. und 1787. 1022 S.)

Q.

Zu Lamberts Brief an Wolfram, IV. B. S. 474 u. ff. Von L. Oberreit.

Schon hatte ich mir eingebildet, unter den Erfindern auch ein kleines Ehrenstellchen verdient zu haben, nachdem ich im Jahr 1781 zur Ausziehung der Quadratwurzel eine ungemein convergente Formel gefunden hatte. Allein der IV. Band des Briefwechsels unsers vortreflichen Lamberts hat den Dunst meiner Einbildung wieder vertrieben, und mir gezeigt, daß er selbst diesen Fund schon 9 Jahre vorher gethan hatte, und zwar in einer geschmeidigern Form, und nicht bloß für die Quadratwurzel, sondern auch für die Cubikwurzel. Und als wenn das gar nichts Besondres wäre, thut er nur beyläufig davon Erwähnung in einem Privatschreiben an Hrn. Wolfram, (vom 19. Dec. 1772, Seite 474. 475,) ohne Geräusche davon zu machen. Aber freylich! Ein Weiser rühmet sich nicht seiner Weisheit. Indessen da er seine Methode nur so im Vorbeygehen gleichsam an den Weg hingelegt hat: so wollen wir sie doch, da sie so einfach und von so schneller Convergenz ist, nicht so ungenützt am Wege liegen lassen, sondern sie nochmals vornehmen, und sie in ihrem ersten Grunde betrachten, nebenher aber mit erläuternden Anmerkungen begleiten. Wir werden sehen, daß sie nicht allein wegen ihrer Simplicität und gewaltigen Convergenz, sondern auch um ihrer Allgemeinheit willen, schätzbar ist. Will man übri-

gens dies mein Geschreibe für bloße Wiederholung des Lambertischen Briefes ansehen: so habe ich nichts dagegen. Wenigstens mag's dann aber zugleich für eine etwas ausführliche Verbesserung der Druck- und Rechnungsfehler, die in gedachtem Briefe sich finden, und zu Irrungen Anlaß geben können, angesehen werden.

Aus der Newtonischen Binomial-Formel

$$(a^n \pm x)^{1:n} - a = \pm \frac{1}{n} . \frac{x}{a^{n-1}} - \frac{1}{n} . \frac{n-1}{2n} . \frac{x^2}{a^{2n-1}} .$$

$$\pm \frac{1}{n} . \frac{n-1}{2n} . \frac{2n-1}{3n} . \frac{x^3}{a^{3n-1}} - \&c.$$

schaffe man das zweyte Glied weg, durch die Multiplication mit $2na^n \pm (n-1)x$. Wird sodann das Product der Reihe mit eben dem Multiplicator wieder dividirt: so hat man

$$(a^n \pm x)^{1:n} = a \pm \frac{2ax}{2na^n \pm (n-1)x} \pm \&c.$$

$$= a . \left(1 \pm \frac{2x}{2na^n \pm (n-1)x} \pm \&c.\right)$$

Dieser Bruch nun giebt die Wurzel, wenn $a > 100x$ ist, meistens schon ziemlich genau an. Doch um sie auf alle Fälle, so genau als man nur will, zu erhalten: so setze man, dieser Ausdruck sey noch mit $y^{1:n}$ multiplicirt; oder es sey

$$(a^n \pm x)^{1:n} = a . \left(1 \pm \frac{2x}{2na^n \pm (n-1)x}\right) . \sqrt[n]{y} .$$

So wird

$$a^n \pm x = a^n . \left(\frac{2na^n \pm (n+1)x}{2na^n \pm (n-1)x}\right)^n . y;$$

Und hieraus

$$y = \frac{[2na^n \pm (n-1)x]^n}{a^n . [2na^n \pm (n+1)x]^n} . (a^n \pm x)$$

$$= \left(1 \mp \frac{2x}{2na^n \pm (n+1)x}\right)^n . \left(1 \pm \frac{x}{a^n}\right).$$

Folglich haben wir

$$(a^n \pm x)^{1:n} = a. \left(1 \pm \frac{2x}{2na^n \pm (n-1)x}\right) . \sqrt[n]{}$$

$$\left[\left(1 \mp \frac{2x}{2na^n \pm (n+1)x}\right)^n . \left(1 \pm \frac{x}{a^n}\right)\right].$$

Es ist aber $\left(1 \mp \frac{2x}{2na^n \pm (n+1)x}\right)^n$, mit $\left(1 \pm \frac{x}{a^n}\right)$ multiplicirt, oder y

$$= 1 \mp n . \frac{2x}{2na^n \pm (n+1)x} + n . \frac{n-1}{2} . \frac{4x^2}{[2na^n \pm (n+1)x]^2} \mp$$

$$n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{8x^3}{[2na^n \pm (n+1)x]^3} + \&c.$$

$$\pm \frac{x}{a^n} \qquad - n . \frac{x}{a^n} . \frac{2x}{2na^n \pm (n+1)x} \pm$$

$$n . \frac{n-1}{2} . \frac{x}{a^n} . \frac{4x^2}{[2na^n \pm (n+1)x]^2} - \&c.$$

Demnach, wenn die drey ersten Glieder der untern Reihe zum zweyten und dritten Gliede der obern Reihe

Reihe in Eins zusammen addirt, die folgenden Glieder der obern Reihe aber schlechthin nur mit $(a^n \pm x):a^n$ multiplicirt werden,

$$y = 1 \pm \frac{(n-1)^2 . x^3}{a^n . [2na^n \pm (n+1)x]^2}$$

$$\mp 8n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{(a^n \pm x) . x^3}{a^n . [2na^n \pm (n+1)x]^3}$$

$$\pm 16n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{(a^n \pm x) . x^4}{a^n . [2na^n \pm (n+1)x]^4}$$

$$\mp \text{\&c.}$$

Aus dieser allgemeinen Formel nun folgt für die Quadratwurzel, wenn wir $n = 2$ setzen,

$$\sqrt{(a^2 \pm x)} \text{ oder } a . \sqrt{\left(1 \pm \frac{x}{a^2}\right)} = a . \sqrt{\left(1 \pm \frac{2x}{4a^2 \pm x}\right)}$$

$$. \sqrt{\left(1 \pm \frac{x^3}{a^2 . (4a^2 \pm 3x)^2}\right.}.$$

Macht man nun $x^3 = x'$,
und $a^2 . (4a^2 \pm 3x)^2 = a'^2$:

So hat man wiederum $\sqrt{\left(1 \pm \frac{x'}{a'^2}\right)} = \left(1 \pm \frac{2x'}{4a'^2 \pm x'}\right)$

$$. \sqrt{\left(1 \pm \frac{x'^3}{a'^2 . (4a'^2 \pm 3x')^2}\right)}.$$

Demnach

$$a . \sqrt{\left(1 \pm \frac{x}{a^2}\right)} = a . \left(1 \pm \frac{2x}{4a^2 \pm x}\right) . \left(1 \pm \frac{2x'}{4a'^2 \pm x'}\right)$$

$$. \sqrt{\left(1 \pm \frac{x'^3}{a'^2 . (4a'^2 \pm 3x')^2}\right)}.$$

Wenn nun wieder $x'^3 = x''$,

und $a'^2 . (4a'^2 \pm 3x')^2 = a''^2$

gesetzt wird: so läßt sich auf solche Art immer weiter fortfahren. — Oder will man, wie Lambert,

$$2x : (4a^2 \pm x) = B : A$$

setzen, so daß $A = 4a^2 \pm \frac{1}{2}B$, oder $8a^2 = 2A \mp B$ wird: so hat man $x^3 = \frac{1}{8}B^3$,

und $4a^2 \pm 3x = A \pm B$.

Folglich

$$\sqrt{\left(1 \pm \frac{x}{a^2}\right)} = \left(1 \pm \frac{B}{A}\right) . \sqrt{\left(1 \pm \frac{B^3}{(A \pm B)^2 . (2A \mp B)}\right)^2}$$

$$= \left(1 \pm \frac{B}{A}\right) . \left(1 \pm \frac{2B^3}{4(A \pm B)^2 . (2A \mp B) \pm B^3}\right) . \sqrt{\ } \text{ \&c.}$$

dergestalt daß jeder nächstfolgende Factor

$$1 \pm \frac{2B^3}{4(A \pm B)^2 . (2A \mp B) \pm B^3} = 1 \pm \frac{2B^3}{8A^3 \pm 3B . (4A^2 - B^2)}$$

durch seinen vorhergehenden $1 \pm \frac{B}{A}$ bestimmt wird.

Eben so giebt uns die allgemeine Formel auch für die Cubikwurzel $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)}$ oder $a . \sqrt[3]{\left(1 \pm \frac{x}{a^3}\right)}$

$$= a . \left(1 \pm \frac{x}{3a^3 \pm x}\right) . \sqrt[3]{\left[1 \pm \frac{(2a^3 \pm x) . x^3}{a^3 . (3a^3 \pm 2x)^3}\right]} .$$

Auch hier kann man

$$(2a^3 \pm x) . x^3 = x', \quad (2a'^3 \pm x') . x'^3 = x'',$$

und $a^3 . (3a^3 \pm 2x)^3 = a'^3$, $a'^3 . (3a'^3 \pm 2x')^3 = a''^3$,

und so weiter, setzen, und auf gleiche Weise, so weit man will, fortfahren. — Oder man macht auch hier ebenfalls, wie Lambert,

$$x : (3a^3 \pm x) = B : A,$$

so daß $3a^3 = A \mp B$ wird. Und so hat man

$$(2a^3 \pm x) . x^3 = \tfrac{1}{3}(2A \pm B) . B^3,$$

und $$a^3 . (3a^3 \pm 2x)^3 = \tfrac{1}{3}(A \pm B)^3 . (A \mp B).$$

Demnach

$$\sqrt[3]{\left(1 \pm \frac{x}{a^3}\right)} = \left(1 \pm \frac{B}{A}\right) . \sqrt[3]{\left[1 \pm \frac{(2A \pm B) . B^3}{(A \pm B)^3 . (A \mp B)}\right]}$$

$$= \left(1 \pm \frac{B}{A}\right) . \left(1 \pm \frac{(2A \pm B) . B^3}{3[(A \pm B)^3 . (A \mp B)] \pm (2A \pm B) . B^3}\right)$$

$$. \sqrt[3]{} \ (\&c.$$

Und solchergestalt wird wiederum jeder folgende Bruch

$$\frac{(2A \pm B) . B^3}{3(A \pm B)^3 . (A \mp B) \pm (2A \pm B) . B^3} = 1 : \left[\frac{3A^3 . (A \pm 2B)}{2B^3 . (A \pm \frac{1}{2}B)} \mp 2\right]$$

aus dem vorhergehenden B:A gefunden. Auch reicht man ebenfalls, so wie bey den Quadratwurzeln, mit jedem Factor über 3mal mehr Decimalstellen weiter hinaus; gleichwie folgendes Beyspiel zeigen wird.

Es

Es ist nämlich nach dieser Regel

$$\sqrt[3]{(1+1)}=\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{126}\right)\cdot\left(1+\frac{253}{768143878}\right)$$
$$(1+\ \&c.$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{127}{126}\cdot\frac{768144131}{768143878}\ldots=\frac{487771523185}{387144514512}\ldots$$

Dies giebt

$$\frac{5}{4}=1,25=\alpha$$

$$+\frac{1}{126}\alpha=+009920\ \ 634920\ \ 634920\ \ 634920\ \ 6=\beta$$

$$+\frac{253}{768143878}\cdot(\alpha+\beta)=+414974\ \ 238244\ \ 102278\ \ 6$$

$$\frac{487771523185}{387144514512}=1,259921\ \ 049894\ \ 873164\ \ 737199\ \ 2$$
$$+\ \ 30011\ \ 4$$

$$\sqrt[3]{2}=1,259921\ \ 049894\ \ 873164\ \ 767210\ \ 6$$

Und daß die drey ersten Factoren diese Cubikwurzel bis auf 20 Decimalstellen richtig angeben, findet sich folgendergestalt.

Wenn 253 = B, und 768143878 = A gesetzt wird: so haben wir vorhin gesehen, daß der auf B:A folgende Bruch

$$=1:\left[\frac{3A^3.(A\pm 2B)}{2B^3.(A\pm\frac{1}{2}B)}\mp 2\right]$$

seyn werde. Ist nun B, wie hier, sehr klein gegen A: so wird $(A\pm 2B):(A\pm\frac{1}{2}B)$ beynahe = 1 seyn;

seyn; und die ledige Zahl ∓ 2 wird gegen $3A^3 : 2B^3$ ebenfalls von keinem Betracht seyn. Folglich kann man diesen Bruch ohne merklichen Fehler

$$= 1 : \frac{3A^3}{2B^3} = \frac{2B^3}{3A^3}$$

setzen. — Nun ist

L. 768143878 = 8,8854426 = L. A. Und L. 253 = 2,4031205 = L. B.

Also

L. 768143878^3 = 26,6563278 = L. A^3, L. 253^3 = 7,2093615 = L. B^3

Log. 3 = 0,4771213 Log. 2 = 0,3010300

L. $3A^3$ = 27,1334491 Ferner Log. $\frac{5}{4}$ = 0,0969100

Log. $\frac{127}{126}$ = 0,0034332

Log. $\frac{768144131}{768143878}$ = 0,0000001

7,6107348

— Log. $3A^3$ = — 27,1334491

Demnach Log. $3{,}00114 . 10^{-20} = -20 + 0{,}4772857$

Das will sagen: Die drey ersten Factoren reichen bis auf die 20ste Decimalstelle; und von dieser Stelle an sind die 6 ersten Ziffern, die der 4te Factor giebt, 300114.

Die von Lambert zuerst (Seite 472. 473) angegebenen Formeln für die Quadrat- und Cubikwurzeln convergiren zwar bey weitem nicht so stark, wie die vorhin angeführten. Doch sind sie immer auch brauchbar, und gar nicht zum Wegwerfen. Wir wollen sie hier auch noch kurz mit anführen, um wenigstens die dabey vorkommenden Fehler zu rectificiren.

Die

Die allgemeine Formel für diese weniger convergente Methode findet sich

$$(a^n \pm x)^{1:n} = a.\left(\frac{x}{1 \pm na^n}\right).\sqrt[n]{\left[1 - \frac{(n-1).[na^n \mp (n-2)x].x^2}{2a^n.(na^n \pm x)^2}\right.}$$

$$\left. \mp n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{(a^n \pm x).x^3}{a^n.(na^n \pm x)^3} + \&c.\right]$$

Folglich für die Quadratwurzel $\sqrt{(a^2 \pm x)}$ oder

$$a.\sqrt{\left(1 \pm \frac{x}{a^2}\right)} = a.\left(1 \pm \frac{x}{2a^2}\right).\sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{(2a^2 \pm x)^2}\right]}$$

$$= a.\left(1 \pm \frac{x}{2a^2}\right).\left(1 - \frac{x^2}{2.(2a^2 \pm x)^2}\right)$$

$$.\sqrt{(\&c.}$$

Hieraus findet sich

$$\sqrt{(1+1)} = \left(1 + \frac{1}{2}\right).\left(1 - \frac{1}{18}\right).\left(1 - \frac{1}{578}\right)$$

$$.\left(1 - \frac{1}{665858}\right).\ \&c.$$

$$\sqrt{(9+1)} = 3.\left(1 + \frac{1}{18}\right).\left(1 - \frac{1}{722}\right).\left(1 - \frac{1}{1039682}\right)$$

$$.\left(1 - \frac{1}{2161873163522}\right).\ \&c.$$

$$\sqrt{13} = \frac{1}{5}.\sqrt{(18^2+1)} = \frac{18}{5}.\sqrt{\left(1 + \frac{1}{324}\right)} = \frac{18}{5}$$

$$.\left(1 + \frac{1}{648}\right).\left(1 - \frac{1}{84202}\right).\left(1 - \right.$$

$$\left.\frac{1}{1419278889602}\right).\ \&c.$$

 Für

Für die Cubikwurzel hat man $\sqrt[3]{(a^3 \pm x)}$ oder

$$a.\sqrt[3]{\left(1 \pm \frac{x}{a^3}\right)} = a.\left(1 \pm \frac{x}{3a^3}\right).\sqrt[3]{\left[1 - \frac{(9a^3 \pm x).x^2}{(3a^3 \pm x)^3}\right]}$$

$$= a.\left(1 \pm \frac{x}{3a^3}\right).\left(1 - \frac{(9a^3 \pm x).x^2}{3.(3a^3 \pm x)^3}\right)$$

$$.\sqrt[3]{(} \&c.$$

Und $\sqrt[3]{11}$ giebt

$$\sqrt[3]{(2^3 + 3)} = 2\sqrt[3]{\left(1 + \frac{3}{8}\right)} = 2.\left(1 + \frac{1}{8}\right).\left(1 - \frac{25}{2187}\right)$$

$$.\left(1 - \frac{510625}{3789643323}\right). \&c.$$

Diese Formeln haben übrigens das Besondre voraus, daß sie eine Abkürzung der Rechnung darbieten, dergleichen auch Herr **Wolfram** bemerkt hat. Es ist nämlich

$$\sqrt{\left(1 \pm \frac{x}{a^2}\right)} = \left(\frac{2a^2 \pm x}{2a^2}\right).\left[\frac{2.(2a^2 \pm x)^2 - x^2}{2.(2a^2 \pm x)^2}\right].\sqrt{} \&c.$$

$$= \frac{1}{2a^2}.\left[\frac{2.(2a^2 \pm x)^2 - x^2}{2.(2a^2 \pm x)}\right]. \&c.$$

Folglich, wenn die Factoren in Brüche verwandelt werden, so hebt sich der Zähler eines jeden vorhergehenden Bruches in dem Nenner des nächstfolgenden Bruches auf: so daß nur der Zähler des letzten Bruches bleibt, und der Nenner aus dem Producte

ducte der doppelten vorhergehenden Zähler bestehet. So z. E. ist

$$\sqrt{(16+3)} = 4 \cdot \sqrt{\left(1+\frac{3}{16}\right)} = 4 \cdot \left(1+\frac{3}{32}\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{9}{2450}\right)\cdot\left(1-\frac{81}{11916962}\right).\ \&c.$$

$$= \frac{4}{1} \cdot \frac{35}{32} \cdot \frac{2441}{2450} \cdot \frac{11916881}{11916962}\ \&c.$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{70} \cdot \frac{11916881}{4882}.\ \&c. = \frac{11916881}{2733920}\ \&c.$$

R.

Supplemente zu den Briefen von Wolfram an Lambert. IV. Band, S. 436—536.

In der Vorrede zu dem IV. Bande habe ich schon angezeigt, warum ein Theil des Ziffernreichen Briefwechsels zwischen Lambert und dem Herrn Hauptmann Wolfram, für den V. Band hat müssen versparet werden; die zurückgelegten Stücke bestanden hauptsächlich in Beylagen zu den Wolframschen Briefen; diese erachte ich mich nun verbunden als Supplemente in gegenwärtigen Zusätzen nachzuholen. Dieses Stück wäre vielleicht noch vollkommener und verbessert erschienen, wenn ich mit Herrn Wolfram selbst über diese Sache hätte correspondiren können; allein ich habe auf den Brief mit welchem ich den ihm zugeschickten IVten Band begleitete keine Antwort erhalten, und nur seit einigen Monaten weiß ich mit etwas Zuverlässigkeit, daß dieser fleißige und geschickte Calculator, dieser in seinem Fache wirklich ausserordentliche Mann, nicht mehr am Leben ist: aber ohne Umstände von Zeit, Ort rc. wo er zu leben aufgehöret hat, und welches Schicksal seine vielen mühsamen handschriftliche Rechnungen gehabt haben, wie man doch zu erfahren sehr wünschen muß, wenn man sich aller seiner Arbeiten und vorgehabten Dispositionen aus seinen Briefen an Lambert erinnert. — Doch ich schreite nun zu den Supplementen,

menten, nach der Ordnung in welcher sie in meinen Anmerkungen zu dem Briefwechsel versprochen worden.

1. Zu S. 491.

Hier folget zuerst die a. a. O. versprochene Tafel zum Nivelliren.

Tafel zum Nivelliren sowohl französisch als rheinländ. auf 50° Polhöhe (Astronom. pag. 120. Tom. 3.)

franz. Schuh.	rheinl. Schuh.	Weiten.	Weiten.	Erhöh.	
1 090 400	1 128 000	franz	rheinl.	Z.	L.
39 254 000	40 608 000	6265	6372	12	—
38 164 000	39 480 000	6178	6283	11	8
37 073 600	38 352 000	6089	6193	11	4
35 983 200	37 224 000	5999	6101	11	—
34 892 800	36 096 000	5907	6008	10	8
33 802 400	34 968 000	5814	5913	10	4
32 712 000	33 840 000	5719	5817	10	—
31 621 600	32 712 000	5623	5719	9	8
30 531 200	31 584 000	5526	5620	9	4
29 449 800	30 456 000	5426	5519	9	—
28 350 400	29 328 000	5325	5416	8	8
27 260 000	28 200 000	5221	5310	8	4
26 169 600	27 072 000	5116	5203	8	—
25 079 200	25 944 000	5008	5094	7	8
23 988 800	24 816 000	4898	4982	7	4
22 898 400	23 688 000	4785	4867	7	—
21 808 000	22 560 000	4670	4750	6	8
20 717 600	21 432 000	4552	4630	6	4
19 627 200	20 304 000	4430	4506	6	—
18 536 800	19 176 000	4305	4379	5	8
17 446 400	18 048 000	4177	4248	5	4
16 356 000	16 920 000	4044	4113	5	—
15 265 600	15 792 000	3907	3974	4	8
14 175 200	14 664 000	3765	3829	4	4
13 084 800	13 536 000	3617	3679	4	—
11 994 400	12 408 000	3463	3522	3	8
10 904 000	11 280 000	3302	3359	3	4
9 813 600	10 152 000	3133	3186	3	—
8 723 200	9 024 000	2954	3004	2	8
7 632 800	7 896 000	2763	2810	2	4
6 542 400	6 768 000	2558	2602	2	—
5 452 000	5 640 000	2335	2375	1	8
4 361 600	4 512 000	2088	2124	1	4
3 271 200	3 384 000	1809	1840	1	—
2 180 800	2 256 000	1477	1502	—	8
1 090 400	1 128 000	1044	1062	—	4

Maaß, der halbe Diameter der Erde, nach de la Lande 3271200 Toises, oder 1692000 Ruthen rheinländisch.

Weiten. franz.	Weiten. rheinl.	Erhöh. Z.	Erhöh. L.	Weiten. franz.	Weiten. rheinl.	Erhöh. L.	Erhöh. P.
3133	3186	3	—	1566	1593	9	0
3089	3142	2	11	1544	1571	8	9
3044	3096	2	10	1522	1548	8	6
2999	3051	2	9	1500	1525	8	3
2954	3004	2	8	1477	1502	8	0
2907	2957	2	7	1453	1478	7	9
2860	2909	2	6	1430	1454	7	6
2812	2860	2	5	1406	1430	7	3
2763	2810	2	4	1381	1405	7	0
2713	2759	2	3	1356	1380	6	9
2662	2708	2	2	1331	1354	6	6
2611	2655	2	1	1305	1328	6	3
2558	2602	2	0	1279	1301	6	0
2504	2547	1	11	1252	1273	5	9
2449	2491	1	10	1224	1245	5	6
2393	2434	1	9	1196	1217	5	3
2335	2375	1	8	1167	1187	5	0
2276	2315	1	7	1138	1157	4	9
2215	2253	1	6	1108	1126	4	6
2153	2190	1	5	1076	1095	4	3
2088	2124	1	4	1044	1062	4	0
2022	2057	1	3	1011	1028	3	9
1954	1987	1	2	977	993	3	6
1882	1915	1	1	941	957	3	3
1809	1840	1	—	904	920	3	0
1732	1761	·	11	866	881	2	9
1651	1679	—	10	826	840	2	6
1566	1593	—	9	783	797	2	3
1477	1502	—	8	738	751	2	0
1381	1405	—	7	691	702	1	9
1279	1301	—	6	639	650	1	6
1167	1187	—	5	584	594	1	3
1044	1062	—	4	522	531	1	0
904	920	—	3	452	460	—	9
738	751	—	2	369	375	—	6
522	531	—	1	261	266	—	3

2. Zu S. 500.

Wolfram an Lambert.

Namur den 14. Oct. 1773.

— — Ihre Anmerkungen über meine Tafel von Rakettensätzen, haben die nöthige Verbesserung und Vermehrung derselben verursachet, welche ich mit der völligen Ausarbeitung und Verfertigung hiemit aufs neue übersende *).

*) Demohngeachtet konnte die erstere, wegen Lamberts Anmerkungen nicht wegbleiben, (s. IV. B. S. 499. 500.) Im Briefe vom 30. Dec. 1773, gab Herr Wolfram auch einige Verbesserungen von Rechnungsfehlern zu dieser 2ten Tafel an: ich habe sie gehörig eingetragen, und die Summen darnach geändert.

Eine Tafel von 9402 Rakettensätzen.

A		B		C 1		C 2	
3 : 4 3 1	2	3 : 8 1 1	6	4 : 12 1 2	9 2	7 : 20 2 3	14 4
5 : 8 0 2	2	6 : 16 2 2	5	6 : 16 1 3	11	8 : 24 2 4	8 1
7 : 12 0 3	4	8 : 24 3 3	11	8 : 20 1 4	13	10 : 28 2 5	19
9 : 16 0 4	4	11 : 32 4 4	11	10 : 24 1 5	15	12 : 32 2 6	10
12 : 20 0 5	7	14 : 40 5 5	21	12 : 28 1 6	17	14 : 36 2 7	23
14 : 24 0 6	3	16 : 48 6 6	11	14 : 32 1 7	19	16 : 40 2 8	12
16 : 28 0 7	11	19 : 56 7 7	32	16 : 36 1 8	21	18 : 44 2 9	27
18 : 32 0 8	7	22 : 64 8 8	21	18 : 40 1 9	23	20 : 48 2 10	14
21 : 36 0 9	10	24 : 72 9 9	32	20 : 44 1 10	25	22 : 52 2 11	31
23 : 40 0 10	7	27 : 80 10 10	22	22 : 48 1 11	27	24 : 56 2 12	16
25 : 44 0 11	18	30 : 88 11 11	53	24 : 52 1 12	29	26 : 60 2 13	35
27 : 48 0 12	7	32 : 96 12 12	21	26 : 56 1 13	31	28 : 64 2 14	18
30 : 52 0 13	21	34 : 104 13 13	64	28 : 60 1 14	33	30 : 68 2 15	39
	103		310		273 2		266 5

C

3		4		5		6	
10 : 28	19	13 : 36	24	16 : 44	29	19 : 52	34
3	6	4	8	5	10	6	12
4		5		6		7	
11 : 32	22	14 : 40	13	17 : 48	32	20 : 56	18
3	5	4	3	5	9	6	5
5		6		7		8	
12 : 36	16	15 : 44	30	18 : 52	35	21 : 60	26
3	2	4	6	5	8	6	6
6		7		8		9	
14 : 40	27	16 : 48	16	19 : 56	38	22 : 64	21
3		4	2	5	7	6	4
7		8		9		10	
16 : 44	29	18 : 52	35	20 : 60	32	23 : 68	46
3		4		5	4	6	8
8		9		10		11	
18 : 48	20	20 : 56	18	22 : 64	43	24 : 72	16
3		4		5		6	2
9		10		11		12	
20 : 52	33	22 : 60	39	24 : 68	45	26 : 76	51
3		4		5		6	
10		11		12		13	
22 : 56	35	24 : 64	20	26 : 72	47	28 : 80	26
3		4		5		6	
11		12		13		14	
24 : 60	24	26 : 68	43	28 : 76	49	30 : 84	36
3		4		5		6	
12		13		14		15	
26 : 64	39	28 : 72	22	30 : 80	50	32 : 88	28
3		4		5		6	
13		14		15		16	
28 : 68	41	30 : 76	47	32 : 84	53	34 : 92	59
3		4		5		6	
14		15		16		17	
30 : 72	28	32 : 80	24	34 : 88	55	36 : 96	20
3		4		5		6	
15		16		17		18	
32 : 76	45	34 : 84	51	36 : 92	57	38 : 100	63
3		4		5		6	
16		17		18		19	
	378		382		555		444
	13		19		38		47

C							
7		8		9		10	
22 : 60	39	25 : 68	44	28 : 76	49	31 : 84	54
7	14	8	16	9	18	10	20
8		9		10		11	
23 : 64	42	26 : 72	23	29 : 80	52	32 : 88	28
7	13	8	7	9	17	10	9
9		10		11		12	
24 : 68	45	27 : 76	50	30 : 84	36	33 : 92	60
7	12	8	14	9	10	10	18
10		11		12		13	
25 : 72	48	28 : 80	26	31 : 88	58	34 : 96	31
7	11	8	12	9	15	10	8
11		12		13		14	
26 : 76	51	29 : 84	56	32 : 92	61	35 : 100	52
7	10	8	12	9	14	10	12
12		13		14		15	
27 : 80	54	30 : 88	29	33 : 96	42	36 : 104	34
7	9	8	5	9	8	10	7
13		14		15		16	
28 : 84	48	31 : 92	62	34 : 100	67	37 : 108	72
7	6	8	10	9	12	10	14
14		15		16		17	
30 : 88	59	32 : 96	32	35 : 104	70	38 : 112	37
7		8	4	9	11	10	6
15		16		17		18	
32 : 92	61	34 : 100	67	36 : 108	48	39 : 116	78
7		8		9	6	10	12
16		17		18		19	
34 : 96	63	36 : 104	34	38 : 112	75	40 : 120	32
7		8		9		10	4
17		18		19		20	
36 : 100	65	38 : 108	71	40 : 116	77	42 : 124	83
7		8		9		10	
18		19		20		21	
38 : 104	67	40 : 112	36	42 : 120	52	44 : 128	42
7		8		9		10	
19		20		21		22	
40 : 108	69	42 : 116	75	44 : 124	81	46 : 132	87
7		8		9		10	
20		21		22		23	
	711		605		768		690
	75		74		111		110

C						
11		12		13		
34 : 92 11 12	59 22	37 : 100 12 13	64 24	40 : 108 13 14	69 26	507 182
35 : 96 11 13	62 21	38 : 104 12 14	33 11	41 : 112 13 15	72 25	416 126
36 : 100 11 14	65 20	39 : 108 12 15	46 14	42 : 116 13 16	75 24	516 134
37 : 104 11 15	68 19	40 : 112 12 16	36 10	43 : 120 13 17	78 23	472 105
38 : 108 11 16	71 18	41 : 116 12 17	76 20	44 : 124 13 18	81 22	630 120
39 : 112 11 17	74 17	42 : 120 12 18	26 6	45 : 128 13 19	84 21	471 75
40 : 116 11 18	77 16	43 : 124 12 19	82 18	46 : 132 13 20	87 20	711 96
41 : 120 11 19	80 15	44 : 128 12 20	42 8	47 : 136 13 21	90 19	575 63
42 : 124 11 20	83 14	45 : 132 12 21	58 10	48 : 140 13 22	93 18	696 60
43 : 128 11 21	86 13	46 : 136 12 22	45 7	49 : 144 13 23	96 17	603 41
44 : 132 11 22	80 10	47 : 140 12 23	94 14	50 : 148 13 24	99 16	833 40
46 : 136 11 23	91	48 : 144 12 24	32 4	51 : 152 13 25	102 15	598 19
48 : 140 11 24	93	50 : 148 12 25	99	52 : 156 13 26	96 12	888 12
	989 185		733 146		1122 258	7916 1073
						8959

Diese Tafel hat unten und zur Rechten keine Grenzen, sondern kann so weit fortgesetzt werden, als man will.

Diese

Diese Tafel hat 3 Theile, A, B und C. A und B haben jede nur eine Perpendicularreihe, und C hat 13, alle 3 haben 13 Horizontalreihen, folglich besteht die Tafel aus 13×15=195 Fächern. Jedes Fach hat eine Anzahl Sätze da Schwefel und Kohlen bleiben, und nur durch den Salpeter die Veränderung und Verschiedenheit gemacht wird. In jedem Fach stehen 3 Zahlen untereinander, welche Salpeter, Schwefel und Kohlen bedeuten. Neben der Ersten steht eine größere, die bedeutet auch Salpeter; daneben, hinter der Linie, eine andere, welche die Anzahl der Sätze in jedem Fache anzeigt. Unter dieser steht in C, in der einen Hälfte, welche die Diagonal macht, noch eine kleinere, die bedeut Sätze, in welchen Schwefel und Kohlen verwechselt werden können. A hat 103 Sätze von Salpeter und Kohlen, ohne Schwefel; B 310 Sätze, von Salpeter, Schwefel und Kohlen, da von Schwefel und Kohlen gleich viel, und C hat 7916 Sätze, da von Kohlen mehr als Schwefel, nebst 1073 Sätzen da von Kohlen weniger als Schwefel, genommen wird.

In A ist 9, 0, 4, in B 8, 3, 3 und in C 4, 1, 2 für den schwächsten und geringsten Satz angenommen worden. A und B sind leicht zu verfertigen; für C hat man noch 3, 1, 1 stärker, und 2, 1, 1 schwächer als 4, 1, 2 gewählet. Das letzte fällt leicht in die Augen, das erste schließe ich so: 4, $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ zum wenigsten so gut, wo nicht besser als 4, 1, 2;

9, 3, 3

$\overline{9, 3, 3} = 3 \times \overline{3, 1, 1}$ ist besser als $\overline{8, 3, 3} = 2 \times \overline{4, 1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}}$, folglich $\overline{3, 1, 1}$ besser, als $\overline{4, 1, 2}$.

Dieser Satz $\overline{4, 1, 2}$ und dessen 2, 3, 4 ꝛc. faches ist in der Diagonal von C, von oben linker Hand, herunter nach der Rechten, eingetragen worden. Alsdann ist $\overline{2, 1, 1}$ von den Sätzen dieser Diagonal, linker Hand beständig subtrahiret, und $\overline{3, 1, 1}$, rechter Hand beständig zu addiret, bis C ganz voll geworden ist. Es ist klar, daß die Sätze rechter Hand der Diagonal, beständig besser werden, weil ein besserer als $\overline{4, 1, 2}$, beständig zu addiret worden; auch daß alle diese Sätze zwischen den engen Schranken $\overline{4, 1, 2}$ und $\overline{3, 1, 1}$ enthalten sind. Ingleichen, daß die Sätze linker Hand sich beständig bessern, weil ein Geringerer als $\overline{4, 1, 2}$, beständig abgezogen worden. Der stärkste von diesen ersten Sätzen, linker Hand der Diagonal, ist $\overline{16, 1, 8}$, weil er die beste Verhältniß zwischen dem Salpeter und Schwefel hat, und der stärkste von den Ersten rechter Hand, ist $\overline{40, 13, 14}$, weil er $\overline{3, 1, 1}$ am nächsten kömmt. Weiter ist zu diesen ersten und geringsten Sätzen in A, B und C das 4fache des Schwefels und Kohlen zum Salpeter gesetzet worden, anzuzeigen, daß man von dem ersten und schwächsten Satz des Salpeters bis da hinauf steigen kann, ehe man den stärksten Satz zu den gegebenen Schwefel und Kohlen erhält. Ich bin

darinn dem Mémoire im Manuel de l'Artificier gefolget, in welchem 16, 0, 4 und 16, 1, 3, jeder für sich, am stärksten sind befunden worden. Wenn der Schwefel $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{5}$, und die Kohlen von $\frac{1}{2}$ bis $\frac{1}{5}$ des Salpeters sind, so können beide mit einander verwechselt, und anstatt des Schwefels das Gewicht der Kohlen, und anstatt der Kohlen das Gewicht des Schwefels genommen werden, und daraus sind die 1073 umgekehrten Sätze in C entstanden. Da alle Sätze in dieser Tafel, einen Zusatz von Mehlpulver leiden, so kann man so viel desselben nehmen von Eins an, bis so viel als der ganze Satz von Salpeter, Schwefel und Kohlen schwer ist und noch darüber. Insonderheit ists gut, die ersten und schwächsten Sätze dieser Tafel, ehe sie bis auf $\frac{1}{4}$ des Salpeters mehr angewachsen sind, mit $\frac{1}{7}$ des ganzen Satzes an Mehlpulver zu verstärken, wie z. E. der 12te Satz von Herrn Stövesand, auf der folgenden Seite.

Im May und Juny 1771 habe ich hier angemerkt, daß eine Bombe aus einem 50pfündigen Mörser, mit 2 Pf. Pulver geladen, und 50° Richtung, an einem frühen Morgen, aber regnicht Wetter, nur etwas weniges über 50 Ruthen geworfen worden, dahingegen die Bombe auf eine andere Zeit, im vollen Tage, aber gut Wetter, mit eben der Ladung und Richtung über 100 Ruthen gefallen ist. Ich schließe aus dieser und andern dergleichen Erfahrungen, daß eine Rakette, nach Beschaffenheit der Luft, einmal viel höher, ja noch

noch einmal so hoch steigen kann, als auf eine andere Zeit.

Die Geschwindigkeit womit eine Rakette steigt, hängt gleichfalls sowohl von der Luft als vom Satz, und überdies noch etwas vom Schlagen des Satzes ab; denn man kann einen Schwärmer so hart schlagen, daß er noch einmal so lange brennt als ein anderer, und weder läuft noch schwärmt, wenn er geworfen wird. Daher kömmts auch zum Theil, daß man die Zehrung der Raketten von 1 Caliber und darüber, bis auf $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ vermindern muß. Was die Sätze für gewisse Caliber betrift, wovon fast alle Alte und Neue so viel Aufhebens machen, so will ich nur die 34 Sätze des Herrn Stövesands (damaligen Braunschweigischen Artillerie-Hauptmanns, als sein Buch 1748 heraus kam) zur Betrachtung hieher setzen, und dieselben, nachdem ich sie erst auf die kleinsten Zahlen gebracht, vom stärksten bis auf den schwächsten, durch Hülfe meiner Tafel, so gut ich gekonnt habe, auf einander folgen laßen; hier sind sie. Es sind eigentlich nur 31.

No.	Mehlp.	Salp.	Schw.	Kohle.	Caliber.
1	16	8	2	3	2, 3 u. 4 Loth 4 u. 5 Pf.
2	16	7	3	5	1 Pf.
3	$10\frac{2}{3}$	8	2	3	6 bis 12 Loth.
4	16	18	6	5	$\frac{1}{4}$ Pf.
5	16	16	4	7	$\frac{1}{2}$ Pf.
6	40	40	10	19	$\frac{3}{4}$ Pf.
7	30	36	13	13	1 Pf.
8	6	7	2	3	$\frac{1}{4}$ Pf.
9	28	32	14	15	1 Pf.
10	16	52	9	21	2 Pf.
11	12	32	10	13	20 bis 40 Pf.
12	1	4	1	2	$\frac{1}{4}$ Pf.
13	2	4	1	3	4 und 6 Loth.
14	—	8	1	2	4 und 5 Pf.
15	—	7	1	2	6 bis 9 Pf.
16	—	10	2	3	3 Pf.
17	—	13	4	3	$\frac{1}{2}$ Pf.
18	—	32	7	10	16 Pf.
19	—	16	5	5	2 Pf.
20	—	$8\frac{1}{4}$	2	$3\frac{1}{16}$	10 Pf.
21	—	8	2	3	15 Pf.
22	—	9	2	4	1, 2 u. 3 Pf. 1 bis 100 Pf.
23	—	11	3	5	1 Pf.
24	—	4	1	2	10 bis 15 Pf.
25	—	10	3	5	$\frac{3}{8}$ bis 1 Pf.
26	—	9	2	5	25 bis 100 Pf.
27	—	16	6	7	4 Pf.
28	—	30	7	18	1, 2 u. 3 Pf. 30, 40, 50 Pf.
29	—	32	7	$20\frac{1}{2}$	100 Pf.
30	—	16	8	7	3 Pf.
31	—	3	1	2	1 bis 60 Pf.

Ich kann aus diesem Verzeichniß unmöglich anders schließen, als daß die Sätze für gewisse Caliber, nur in der Einbildung bestehen und daß,

wenn ein Satz gut ist, derselbe wie Nr. 22, 9, 2, 4 von 1 bis 100 Pf., das ist: zu allen Calibern gut ist.

Man will gute Sätze für große Caliber zu stark befunden haben; ich bin aber versichert, daß es nur am Füllen und Schlagen gelegen hat. Wenn man auf einmal 2, 3, 4 ꝛc. Zoll Satz in große Hülsen thut, so ist es unmöglich denselben durchs Schlagen zur nöthigen und gleichen Härte und Festigkeit zu bringen; denn indem der Obertheil des Satzes niedergeschlagen und hart wird, wird er zu gleicher Zeit so stark inwendig an die Seitenwände des Papiers geklemmt, daß solches nicht mehr nachgiebt, sondern mit hineingeschlagen wird, wodurch noch mehr verhindert wird, daß der mittlere Theil, kaum fest genug, der untere Theil des Satzes aber, so los bleibt, daß die Rakette beym Anstecken gleich springen muß.

Wollte man aber sich gefallen laßen, in großen Raketten allezeit weniger als einen Zoll Satz, ja nur einen halben Zoll jedesmal hineinzuschütten, so würde man ohne große Mühe und Gewalt denselben zur gehörigen gleichen Festigkeit und Härte schlagen können, und man würde keinen Satz, wie groß der Caliber auch wäre, zu stark finden.

Schlechtere Sätze zu gebrauchen, als die in dieser Tafel stehen, wie z. E. die Sätze des Herrn Stövesands von Nr. 25 bis 31 bleibt unverboten. Es ist aber unmöglich, daß eine Rakette mit

einem solchen faulen Satz, so geschwind und so hoch steigen kann, als mit einem guten, und daß der Unterschied sehr merklich seyn muß, wenn die Luft und übrigen Umstände einerley sind. Wegen des Satzes Nr. 31. 3, 1, 2 den Herr Stövesand zu 1 bis 60 Pfund angiebt, habe ich zu erinnern, daß ihn Simienowicz zu 100, 80 und 60 Pf. gegeben, und daß ich davon Wasserschwärmer habe laßen schlagen, die gut gegangen sind. Im 2ten Theile von Simienowicz, von D. Elrich, habe ich den elendesten von allen Sätzen angetroffen, nemlich 4, 2, 3.

Ich hätte die Tafel von Rakettensätzen gern verkürzen, und auf 9 Perpendicular- und 7 Horizontalreihen bringen wollen, weil sie mir was pralerisch aussieht. Ich habe aber doch Bedenken getragen, solches zu thun, da ich den 7ten, 10ten und 29sten Satz von Stövesand, kaum in der 12ten und 13ten Horizontalreihe habe aufsuchen können; und wegen des 9ten Satzes noch eine Perpendicularreihe zu kurz komme. Den 20ten habe ich müssen in Brüchen und den 30ten in kleineren Zahlen geben, die nächst beykommen.

Was endlich noch die Länge der Raketten betrift, so halte ich es mit den heutigen Feuerwerkern. Z. E. einem Stövesand, weil ich in Simienowicz keine Ursache finden kann, davon abzugehen.

Es hat nicht am guten Willen gelegen, daß ich nicht weiter in diesem Theil von der Artillerie gefördert

dert bin, sondern an die unüberwindlichen Schwierigkeiten, welche mir bisher sind in den Weg geleget worden.

3. Zu S. 503.

Hier folget das Verzeichniß der (Prim- und durch Primzahlen theilbaren) Zahlen, welche $< 1000^2$ sind, dessen Lambert in seinem Briefe vom 21. Aug. 1773, a. d. 503. S. erwähnet. Es gehöret eigentlich zu S. 495 in Wolframs Briefe vom 5. April 1775. Nach der daselbst mitgetheilten Zergliederung der Logarithmen von 991981 bis 1000 015, setzte Herr Wolfram nachstehendes hinzu:

„Ich habe auch sonst schon ausgerechnet, daß „von Eins bis eine Million sich 78458 Primzahlen befinden, darunter die Primzahlen von 2, 3 „und 5 nicht gerechnet, Eins aber mitgezählt ist: „so daß, ohne die Einheit, aber mit diesen 3 Primzahlen sich 78460 Primzahlen unter Eine Million „befinden. Weiter 38095 Zahlen deren kleinster „Factor 7; 20778 deren kleinster Factor 11; „15983 deren kleinster Factor 12 ist, u. s. w. wie „aus dem folgenden Verzeichniß zu ersehen."

78458	1	457	271	152	601
38095	7	446	277	149	607
20778	11	439	281	147	613
15983	13	434	283	144	617
11283	17	418	293	142	619
9502	19	398	307	136	631
7454	23	391	311	131	641
5766	29	388	313	129	643
4998	31	381	317	126	647
4133	37	367	331	124	653
3617	41	360	337	121	659
3356	43	349	347	120	661
2982	47	347	349	114	673
2575	53	340	353	111	677
2261	59	333	359	109	683
2143	61	325	367	105	691
1910	67	315	373	99	701
1775	71	308	379	97	709
1700	73	304	385	94	719
1553	79	299	389	92	727
1460	83	291	397	89	733
1354	89	289	401	87	739
1244	97	283	409	86	743
1195	101	274	419	85	751
1171	103	270	421	83	757
1136	107	262	431	80	761
1109	109	260	433	76	769
1074	113	254	439	74	773
964	127	250	443	68	787
937	131	245	449	66	797
898	137	240	457	63	809
886	139	238	461	62	811

832	149	236	463	58	821
820	151	233	467	56	823
794	157	224	479	54	827
763	163	218	487	53	829
745	167	215	491	50	839
719	173	210	499	47	853
697	179	205	503	45	857
689	181	201	509	44	859
654	191	196	521	42	863
647	193	194	523	39	877
633	197	184	541	38	881
629	199	181	547	37	883
593	211	177	557	35	887
562	223	172	563	30	907
551	227	170	569	29	911
547	229	168	571	25	919
539	233	165	577	23	929
523	239	160	587	21	937
518	241	156	593	19	941
496	251	155	599	17	947
485	257			15	953
473	263			12	967
462	269			9	971
				8	977
				5	983
				3	991
				1	997

Summa in allen 1266666 Zahlen.

Wenn ich mich nicht irre, könnte dieses Verzeichniß etwas zur Prüfung und Verbesserung der Zergliederung der Zahlen, bis auf eine Million beytragen.

4. Zu S. 508.

Ich habe mit etwas Unbesonnenheit in meiner Anmerkung a. a. O. Wolframs 3 Proben seiner Art die hyperbolischen Logarithmen zu berechnen versprochen. Ungerne gehe ich daran; die hier folgenden vielen Zahlen abdrucken zu laßen, in der Ungewißheit, ob irgend jemand verhältnißmäßig mir dafür danken wird; es ist aber versprochen; ich sehe und weiß es, und so darf mich nichts zurückhalten, mein Versprechen zu erfüllen.

A. *)

Probe oder Auszug von Berechnung einer Tafel der hyperbolischen Logarithmen: angefangen im Jahre 1772.

Die Logarithmen zu finden, sind mir folgende drey Formeln bekannt:

a) $$\text{Log.}\,\frac{1+n}{1} = n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \;\&c.$$

b) $$\text{Log.}\,\frac{1}{1-n} = n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{5}n^5 \;\&c.$$

c) $$\text{Log.}\,\frac{1+n}{1-n} = 2n + \frac{2}{3}n^3 + \frac{2}{5}n^5 \;\&c.$$

*) Diese erste Probe begleitete einen kurzen Brief vom 30. Decbr. 1773.

Durch alle drey Formeln erhält man zu einer Absolutzahl nur einen und denselben Logarithmen; zum Exempel:

$$\text{Log. } 2 = \text{Log. } \frac{1+1}{1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ \&c.$$

$$\text{Log. } 2 = \text{Log. } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^{2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{3}} + \frac{1}{4 \cdot 2^{4}} \ \&c.$$

$$\text{Log. } 2 = \text{Log. } \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^{3}} + \frac{2}{5 \cdot 3^{5}} \ \&c.$$

denn alle drey Logarithmen in Decimaltheile aufgelöset, geben Log. 2 = 0. 693 147 180 ꝛc.

Nach Saunderson ist der

$$\text{Log. } 2 = \frac{2}{3} + \frac{A}{3 \cdot 3^{2}} + \frac{3B}{5 \cdot 3^{2}} \ \&c.$$

$$\text{und Log. } 8 = 2 + \frac{A}{3 \cdot 3^{2}} + \frac{3B}{5 \cdot 3^{2}} \ \&c.$$

$$\text{Log. } \frac{5}{4} = \frac{2}{9} + \frac{A}{3 \cdot 9^{2}} + \frac{3B}{5 \cdot 9^{2}} \ \&c. \quad \text{endlich}$$

$$\text{Log. } 8 \times \frac{5}{4} = \text{Log. } 10 = 2.302\,585\,092 \ \&c.$$

Ich habe denselben auf eine andere Art auch also gefunden:

$$\text{Log. } \frac{10}{9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} + \frac{1}{40000} \ \&c.$$

Log.

$$\log.\frac{10}{8}=\frac{2}{10}+\frac{4}{200}+\frac{8}{3000}+\frac{16}{40000}\ \&c.$$

$$\log.\frac{12}{10}=\frac{2}{10}-\frac{4}{200}+\frac{8}{3000}-\frac{16}{40000}\ \&c.$$

$$\frac{10}{9}\times\frac{10}{8}\times\frac{12}{10}\times\frac{12}{10}=2,\ \text{und}\ 2^3\times\frac{10}{8}=10.$$

Nach diesen Formeln hat man eigentlich nur nöthig, die Logarithmen der Primzahlen zu berechnen; denn die der componirten Zahlen werden aus den ersten durch eine bloße Addition gefunden.

Weil in natürlicher Ordnung das Leichtere vor dem Schweren stehen muß, so werden auch hier die Logarithmen zuerst gesucht, die am leichtesten zu finden sind, es mögen Primzahlen seyn oder nicht, wenn man nur ihre Zergliederung hat, das ist: aus was für Primzahlen sie zusammengesetzt sind. Und das sind die folgenden Zahlen, in so weit ich dieselben zergliedert habe, und der größte Primfactor unter 10000 ist, weil ich nicht weiter zu gehen gedenke. So wie man sieht, werden in folgenden Rechnungen nur die zwey ersten Formeln gebraucht, keinesweges aber die dritte.

9	3^2
11	. .
99	9. 11
101	. . .
999	9. 3. 37
1 001	11. 7. 13
9 999	99. 101
10 001	73. 137
99 999	9. 41. 271
100 001	11. 9091
999 999	999. 1001
1 000 001	101. 9901
9 999 999	9. 239. 4649
10 000 001	11. 909091
99 999 999	9999. 10001
100 000 001	17. 5 882 353
999 999 999	999. 3. 333 667
1 000 000 001	1001. 19. 52 579
9 999 999 999	99 999. 100 001
10 000 000 001	101. 3541. 27961
100 000 000 001	11^2. 23. 4093. 8779
999 999 999 999	999 999. 1000 001
1000 000 000 000 001	100 001. 7. 13. 211. 241. 2161

$1' = 100\,000\,\overset{6}{000}\,\overset{12}{000}\,000''$

5 000 000 000 000
333 333 333 333
25 000 000 000
2 000 000 000
166 666 666
14 285 714
1 250 000
111 111
10 000
909
83

	6 · 12 · 7
$\sqrt{\frac{11}{9}}$	0. 100 335 347 731 075
$\sqrt{\frac{100}{99}}$	0. 005 025 167 926 750
$\frac{10}{9}$	0. 105 360 515 657 826
$\frac{11}{10}$	0. 095 310 179 804 324
10	2. 302 585 092 994 045
9	2. 197 224 577 336 219
3	1. 098 612 288 668 109
11	2. 397 895 272 798 370
9. 11 = 99	4. 595 119 850 134 589

1″ =

6 12

1 = . . 10 000 000 000 000''

50 000 000 000

333 333 333

2 500 000

20 000

166

6 12 1

	10 000 333 353 334
	50 002 500 166
$\frac{100}{99}$	0, 010 050 335 853 501
$\frac{101}{100}$	0. 009 950 330 853 168
100	4. 605 170 185 988 091
9, 11 = 99	4. 595 119 850 134 589
101	4, 615 120 516 841 259

III 6 12

1 = . . . 1 000 000 000 000''

500 000 000

333 333

6 12 250

	0. 001 000 500 333 583
	0. 000 999 500 333 083
1000	6. 907 755 278 982 137
999	6. 906 754 778 648 553
3^3 = 27	3. 295 836 866 004 329
37	3. 610 917 912 644 224
1001	6, 908 754 779 315 220
11	2. 397 895 272 798 370
91	4. 510 859 506 516 850
7	1. 945 910 149 055 313
13	2. 564 949 357 461 536

So bald im folgenden der Log. 7 gefunden ist, wird er hier von Log. 91 abgezogen.

IV

6 12

I = ... 100 000 000 000''

	5 000 000
	(6) 333
	0. 000 100 005 000 333
	0. 099 099 995 000 333
10 000	9. 210 340 371 976 182
9 999	9. 210 240 366 975 849
99	4. 595 119 850 134 589
101	4. 615 120 516 841 259
10 001	9. 210 440 366 976 516
73	4. 290 459 441 148 391
137	4. 919 980 925 828 124

V

6 12

I = ... 10 000 000 000''

	50 000
	0. 000 010 000 050 000
	0. 000 009 999 950 000
100 000	11. 512 925 464 970 228
99 999	11. 512 915 464 920 228
9.41 = 369	5. 910 796 644 040 527
271	5. 602 118 820 879 700
100 001	11. 512 935 464 920 228
11	2. 397 895 272 798 370
9091	9. 115 040 192 121 858

VI

6 12

I = ... 1 000 000 000''

	500
	0. 000 001 000 000 500
	0. 000 000 999 999 500
1 000 000	13. 815 510 557 964 274
999. 1001 = 999 999	13. 815 509 557 963 774
1 000 001	13. 815 511 557 963 774
101	4. 615 120 516 841 259
9 901	9. 200 391 042 122 514

VII

I =

	VII 6 12
	I = ... 100 000 000''
	5
	0 . 000 000 100 000 005
10 000 000	16 . 118 095 650 958 319
9 999 999	16 . 118 095 550 958 314
9 . 239 = 2 151	7 . 673 688 129 267 730
4649	8 . 444 407 421 690 584

	XI 6 12
	I = ... 10 000''
	0 . 000 000 000 009 999
100 000 000 000	25 . 328 436 022 934 502
100 000 000 001	25 . 328 436 022 944 502
11^2 . 23 . 4093	16 . 248 318 238 018 293
8779	9 . 080 117 784 926 208

	XV 6 12
	I = ... 1''
	0 . 000 000 000 000 000
1 000 000 000 000 000	34 . 538 776 394 910 685
1 000 000 000 000 001	34 . 538 776 394 910 686
100 001 . 91 . 211 . 241	26 . 860 450 038 403 800
2161	7 . 678 326 356 506 885

Von Primzahlen sind bisher nur die Logarithmen 3, 11, 37, 101, 9091 und 9901 wirklich gefunden, die von 2 und 5 ungerechnet; so bald man aber in folgenden die Log. 7, 23, 41, 73, 211, 241, und 4093 gefunden hat, so hat man auch hier die von 13, 137, 271, 2161, 4649 und 8779.

Den

Den übrigen Raum will ich noch mit dem Anfange der Fortsetzung ausfüllen.

2	1	128	7	8 192	13
4	2	256	8	16 384	14
8	3	512	9	32 768	15
16	4	1024	10	65 536	16
32	5	2048	11	131 072	17
64	6	4096	12	262 144	18

u. s. f.

2	..
8	2^3
12	$2^2 . 3$
98	$2 . 7^2$
102	2. 3. 17
998	2. 499
1002	2. 3. 167
9 998	2. 4999
10 002	2. 3. 1667
99 998	2. 49 999
100 002	2. 3. 7. 2381
999 998	$2 . 31 . 127^2$
1 000 002	2. 3. 166 667
10 000 002	2. 3. 47. 35461
100 000 002	2. 3. 19. 739. 1187
1 000 000 002	2. 3. 43. 983. 3943

2'' = 200 000 000 000 000''
20 000 000 000 000
2 666 666 666 666
400 000 000 000
64 000 000 000
10 666 666 666
1 828 571 428
320 000 000
56 888 888
10 240 000
1 861 818
341 333
63 015
11 702
2 184
469
77
14

6 ‿ 12 ‿ 2

202 732 554 054 082
20 410 997 260 127

$\frac{10}{8}$	0. 223 143 551 314 209
$\frac{12}{10}$	0. 182 321 556 793 954
10	2. 302 585 092 994 045
8	2. 079 441 541 679 835
2	0. 693 147 180 559 945
12	2. 484 906 649 788 000
4	1. 386 294 361 119 890
3	1. 098 612 288 668 109

2'' =

ii 6 7

2 = 20 000 000 000 000''
200 000 000 000
2 666 666 666
40 000 000
640 000
10 666
182
6 12 3

	20 002 667 306 849
	200 040 010 669
	0. 020 202 707 317 519
	0. 019 802 627 296 179
100	4. 605 170 185 988 091
98	4. 584 967 478 670 571
2	0. 693 147 180 559 945
49	3. 891 820 298 110 626
7	1; 945 910 149 055 313
102	4. 624 972 813 284 271
2. 3 = 6	1: 791 759 469 228 055
17	2. 833 213 344 056 216

iii 67 12

2 = . . 2 000 000 000 000''
2 000 000 000
2 666 666
4 000
6 12 6

	0. 002 002 002 670 673
	0. 001 998 002 662 673
1000	6. 907 755 278 982 137
998	6: 905 753 276 311 463
2	0. 693 147 180 559 945
499	6, 212 606 095 751 518
1002	6. 909 753 281 644 810
6	1. 791 759 469 228 055
167	5. 117 993 812 416 755

B. *) Von den Zahlen, deren Logarithmen man aus den Dignitäten der Zahl 2 mit Vortheil finden kann.

Wenn man von den Dignitäten von 2, folgende Tafel verfertigt.

1. 000 000 000 000 000″	4′. 8′ = 32″
400 000 000 000 000	2
320 000 000 000 000	5
128 000 000 000 000	7
103 400 000 000 000	10
40 960 000 000 000	12
32 768 000 000 000	15
13 107 200 000 000	17
10 485 760 000 000	20
4 194 304 000 000	22
3 355 443 200 000	25
1 342 177 280 000	27
1 073 741 824 000	30
429 496 729 600	32
343 597 383 680	35
137 438 953 473	37
109 951 162 777	40
43 980 465 111	42
35 184 372 088	45
14 073 748 835	47
11 258 999 068	50
4 503 599 627	52
3 602 879 701	55
1 441 151 880	57
1 152 921 504	60
461 168 601	62
368 934 881	65
147 573 952	67
118 059 162	70
47 223 664	72
37 778 931	75
15 111 572	77
12 089 258	80
4 835 703	82
3 868 562	85
1 547 425	87
1 237 940	90
495 176	92
396 140	95
158 456	97
126 765	100
50 706	102
40 564	105
16 225	107
12 980	110
5 192	112
4 153	115
1 661	117
1 329	120
531	122
425	125
170	127
136	130 u. s. w.

Die übrigen Dignitäten von 2 werden aus diesen durch bloßes Duppliren od. Halbiren gefunden.

Aus einer solchen Tafel können zu nachfolgenden Zahlen die Logarithmen gefunden werden, von welchen ich aber nur diejenigen hersetze, die ich völlig zergliedert habe.

*) Dies war die 2te Probe, bey einem kleinen Briefe vom 17. März 1774.

2	..
8	2^3
12	$2^2 . 3$
98	$2 . 7^2$
102	2. 3. 17
998	2. 499
1 002	2. 3. 167
9 998	2. 4999
10 002	2. 3. 1667
99 998	2. 49 999
100 002	2. 3. 7. 2831
999 998	$2 . 31 . 127^2$
1 000 002	2. 3. 166 667
9 999 998	2. 4999 999
10 000 002	2. 3. 47 35461
99 999 998	2. 7. 23. 310 559
100 000 002	2. 3. 19. 729. 1187
999 999 998	2. 691. 723 589
1 000 000 002	2. 3. 43. 983. 3943
10 000 000 000 002	2. 3. 2221. 2287. 328 121

4	2^2
6	2. 3
14	2. 7
96	8. 12
104	$2^3 . 13$
996	$2^2 . 3 . 83$
1 004	$2^2 . 251$
9 996	98 / 102
10 004	$2^2 . 41 . 61$
99 996	$2^2 . 3 . 13 . 641$
100 004	$2^2 . 23 . 1087$
999 996	998. 1002
1 000 004	$2^2 . 53^2 . 89$
9 999 996	$2^2 . 3 . 191 . 4363$
10 000 004	$2^2 . 7 . 19 . 18797$
99 999 996	9998. 10 002
100 000 004	$2^2 . 13^2 . 29 . 5101$
1 000 000 004	$2^2 . 41^2 . 148721$
9 999 999 996	99 998. 100 002
99 999 999 996	$2^2 . 3 . 13 . 7477 . 85733$
999 999 999 996	999 998. 1000 002
1 000 000 000 004	$2^2 . 17 . 149 . 197 . 501001$

8	2^3
92	$2^2 . 23$
108	$2^2 . 3^3$
992	$8. 2^2 . 31$
1 008	$12. 2^2 . 3.7$
9 992	$2^3 . 1249$
10 008	$2^3 . 3^2 . 139$
99 992	$2^3 .29. 431$
100 008	$2^3 . 3^3 . 463$
999 992	$98. 2^2 . 2551$
1 000 008	$102. 2^2 . 3. 19. 43$
9 999 992	$2^3 . 1\,2499\,99$
10 000 008	$2^3 . 3^2 . 138\,889$
99 999 992	$2^3 . 12\,499\,999$
000 000 008	$2^3 . 3^4 . 154\,321$
999 999 992	$998. 2^2 . 250\,501$
1 000 000 008	$1002. 2^2 . 3. 7. 109^2$
9 999 999 992	$2^3 . 4409. 283\,511$
999 999 999 992	$9998. 2^2 .7. 79. 103. 439$
100 000 000 000 008	$2^3 . 3^3 . 457. 3923. 258\,233$

16	2^4
84	$6. 14$
116	$2^2 .29$
984	$2^3 . 3. 41$
1 016	$2^3 . 127$
9 984	$96. 104$
10 016	$2^5 . 313$
99 984	$2^4 . 3. 2083$
100 016	$2^4 . 7. 19. 47$
999 984	$996. 1004$
1 000 016	$2^4 . 62501$
9 999 984	$2^4 . 3. 208\,333$
10 000 016	$2^4 . 13. 131. 367$
99 999 984	$9996. 10\,004$
100 000 016	$2^4 . 97. 64\,443$
999 999 984	$2^4 . 3. 31. 672\,043$
9 999 999 984	$99\,996. 100\,004$
99 999 999 984	$2^4 . 3. 71. 733. 40031$
999 999 999 984	$999\,996. 1000\,004$
9 999 999 999 984	$2^4 . 3. 41. 173. 773. 37\,997$
99 999 999 999 984	$9\,999\,996. 10\,000\,004$

32	2^5
68	$2^2 . 17$
132	$2^2 . 3 . 11$
968	$2^3 . 11^2$
1 032	$2^3 . 3 . 43$
9 968	$2^4 . 7 . 89$
10 032	$2^4 . 3 . 11 . 19$
99 968	$8 . 2^4 . 11 . 71$
100 032	$12 . 2^4 . 521$
999 968	$2^5 . 31\,249$
1 000 032	$2^5 . 3 . 11 . 947$
9 999 968	$2^5 . 11 . 28\,409$
10 000 032	$2^5 . 3 . 7 . 23 . 647$
99 999 968	$2^5 . 3124999$
100 000 032	$2^5 . 3 . 11 . 281 . 337$
999 999 968	$2^5 . 11 . 59 . 179 . 269$
1 000 000 032	$2^5 . 3 . 127 . 82\,021$
999 999 999 968	$2^5 . 47 . 1753 . 379289$
999 999 999 999 968	$998 . 2^4 . 11 . 31 . 811 . 226451$

64	2^6
936	$6 . 2^2 . 3 . 13$
1 064	$14 . 2^2 . 19$
9 936	$92 . 108$
10 064	$2^4 . 17 . 37$
99 936	$2^5 . 3^2 . 347$
100 064	$2^5 . 53 . 59 .$
999 936	$992 . 1008$
1 000 064	$104 . 2^4 . 601$
9 999 936	$2^6 . 3^5 . 643$
10 000 064	$2^6 . 37 . 41 . 103$
99 999 936	$9992 . 10\,008$
100 000 064	$2^6 . 1201 . 1301$
999 999 936	$996 . 2^4 . 3 . 13 . 1609$
1 000 000 064	$1004 . 2^4 . 7 . 8893$
9 999 999 936	$99\,992 . 100\,008$
999 999 999 936	$999\,992 . 1000008$
1 000 000 000 064	$10\,004 . 2^4 . 13 . 157 . 3061$
99 999 999 999 936	$9\,999\,992 . 10000008$
1 000 000 000 000 064	$100004 . 2^4 . 7 . 127 . 727 . 967$

128	2^7
872	$2^3 . 109$
1 128	$2^3 . 3 . 47$
9 872	$2^4 . 617$
10 128	$2^4 . 3 . 211$
99 872	$2^5 . 3121$
100 128	$2^5 . 3 . 7 . 149$
999 872	$2^6 . 17 . 919$
1 000 128	$2^6 . 3 . 5209$
9 999 872	$8 . 2^6 . 19531$
10 000 128	$12 . 2^6 . 29 . 449$
99 999 872	$2^7 . 7 . 233 . 479$
100 000 128	$2^7 . 3 . 260\,417$
10 000 000 128	$2^7 . 3 . 89 . 227 . 1289$
100 000 000 128	$2^7 . 3 . 7 . 5843 . 6367$
1 000 000 000 128	$2^7 . 3 . 8273 . 314\,779$

256	2^8
9 744	$84 . 116$
10 256	$2^4 . 641$
99 744	$2^5 . 3 . 1039$
100 256	$2^5 . 13 . 241$
999 744	$984 . 1016$
1 000 256	$2^6 . 15\,629$
9 999 744	$2^7 . 3 . 26041$
10 000 256	$2^7 . 7 . 11161$
99 999 744	$9984 . 10016$
100 000 256	$2^7 . 17 . 11489$
999 999 744	$2^8 . 3 . 43 . 107 . 283$
1 000 000 256	$2^8 . 23 . 169837$
9 999 999 744	$99984 . 100\,016$
10 000 000 256	$2^8 . 3529 . 11069$
99 999 999 744	$2^8 . 3 . 41 . 53 . 59921$

512	2^9
9 488	$2^4 . 593$
10 512	$2^4 . 3^2 . 73$
99 488	$2^5 . 3109$
100 512	$2^5 . 3^2 . 349$
999 488	$92 . 2^4 . 7 . 97$
1 000 512	$108 . 2^4 . 3 . 193$
9 999 488	$2^7 . 78121$
10 000 512	$2^7 . 3^2 . 8681$
99 999 488	$2^8 . 73 . 5351$
100 000 512	$2^8 . 3^2 . 43403$
999 999 488	$992 . 2^6 . 19 . 829$
1 000 000 512	$1008 . 2^6 . 3 . 5167$
9 999 999 488	$2^9 . 17 . 79 . 14543$
10 000 000 512	$2^9 . 3^2 . 587 . 3697$
99 999 999 488	$2^9 . 4831 . 40429$
999 999 999 488	$9992 . 2^6 . 7 . 127 . 1759$
1 000 000 000 512	$10008 . 2^6 . 3 . 73 . 7129$
999 999 999 999 488	$99992 . 2^6 . 151 . 229 . 4519$
1 000 000 000 000 512	$100008 . 2^6 . 3 . 7 . 67 . 111043$

1 024	2^{10}
8 976	$68 . 132$
11 024	$2^4 . 13 . 53$
98 976	$6 . 2^4 . 1031$
101 024	$14 . 2^4 . 11 . 41$
998 976	$968 . 1032$
1 001 024	$2^6 . 15641$
9 998 976	$2^7 . 3 . 13 . 2003$
10 001 024	$2^7 . 11 . 7103$
99 998 976	$9968 . 10032$
100 001 024	$2^8 . 577 . 677$
999 998 976	$2^9 . 3 . 653 . 997$
1 000 001 024	$2^9 . 11 . 277 . 641$
9 999 998 976	$99968 . 100032$
10 000 001 024	$104 . 2^8 . 41 . 9161$
99 999 998 976	$2^{10} . 3 . 197 . 373 . 443$
100 000 001 024	$2^{10} . 7 . 11 . 173 . 7331$
999 999 998 976	$999968 . 1000032$
1 000 000 001 024	$2^{10} . 17^2 . 29 . 109 . 1069$

2 048	2^{11}
97 952	$2^5.3061$
102 048	$2^5.3.1063$
997 952	$2^6.31.503$
1 002 048	$2^6.3.17.307$
9 997 952	$2^7.19.4111$
10 002 048	$2^7.3.7.61^2$
99 997 952	$2^8.47.8311$
100 002 048	$2^8.3.130211$
999 997 952	$2^9.29.67349$
0 999 997 952	$2^{10}.7.151.9239$
100 000 002 048	$12.2^{10}.23.67.5281$
999 999 997 952	$2^{11}.113.353.12241$

4 096	2^{12}
95 904	$2^5.3^4.37.$
104 096	$2^5.3253$
995 904	936. 1064
1 004 096	$116.2^4.541$
9 995 904	$2^7.3^2.8677$
10 004 096	$2^7.78\,157$
99 995 904	9936. 10064
100 004 096	$2^8.113.3457$
999 995 904	$984.2^6.3.67.79$
1 000 004 096	$1016.2^6.7.13^3$
9 999 995 904	99936. 100 064
99 999 995 904	$2^{11}.3^3.37^2.1321$
100 000 004 096	$2^{11}.331.147\,517$
999 999 995 904	999 936. 1000 064
1 000 000 004 096	$10016.2^8.390001$
999 999 999 995 904	$99984.2^8.3.241.54037$

8 192	2^{13}
991 808	$2^6.15\,497$
1 008 192	$2^6.3.59.89$
9 991 808	$2^7.251.311$
10 008 192	$2^7.3.67.389$
99 991 808	$2^8.7.55\,799$
100 008 192	$2^8.3.107.1217$
1 000 008 192	$2^9.3\ 229.2843$
10 000 008 192	$2^{10}.3.17.419.457$
99 999 991 808	$2^{11}.61.709.1129$
100 000 000 008 192	$2^{13}.3.19^2.97.116\,201$

16 384	2^{14}
983 616	872. 1128
1 016 384	2^{6}. 15881
9 983 616	2^{7}.3.25999
10 016 384	$2^{7}.7^{2}$.1597
99 983 116	9872. 10128
100 016 384	2^{8}.13.41.733
999 983 616	2^{9}.3.31.21001
9 999 983 616	99872. 100128
10 000 016 384	2^{10}.797.12253
99 999 983 616	2^{11}.3.13.163.7681
100 000 016 384	2^{11}.691.70663
999 999 983 616	999872.1000128
10 000 000 016 384	2^{13}.7.41.19.23.9733

32 768	2^{15}
967 232	68.2^{4}.7.127
1 032 768	132.2^{4}.3.163
9 967 232	2^{7}.11.7079
10 032 768	$2^{7}.3^{3}$.2903
99 967 232	2^{8}.79.4943
100 032 768	$2^{8}.3^{2}$.11.3947
999 967 232	968.2^{6}.16141
1 000 032 768	1032.2^{6}.3.7^{2}.103
9 999 967 232	92.2^{8}.281.1511
10 000 032 768	108.2^{8}.11.131.251
100 000 032 768	$2^{11}.3^{2}$.29.187081
999 999 967 232	9968.2^{8}.391879
1 000 000 032 768	10032.2^{8}.3.129793
999 999 999 967 232	99968.124.2^{8}.181.1741
1 000 000 000 032 768	100032.84.2^{8}.61.7621

65 536	2^{16}
9 934 464	2^{7}.3.41.631
10 065 536	2^{7}.13.23.263
99 934 464	9744. 10256
100 065 536	2^{8}.17.22993
999 934 464	2^{9}.3.53.71.173
9 999 934 464	99744.100256
100 000 065 536	$2^{11}.7^{2}$.19.179.293

131 072	2^{17}
9 868 928	$2^{7}.77101$
10 131 072	$2^{7}.3.7.3769$
100 131 072	$2^{8}.3.130379$
999 868 928	$2^{9}.239.8171$
9 999 868 928	$2^{10}.7.17.137.599$
10 000 131 072	$2^{10}.3.19.171329$
100 000 131 072	$2^{11}.3.181.89923$
999 999 868 928	$2^{12}.31.191.41233$
9 999 999 868 928	$2^{13}.251.739.6581$

262 144	2^{18}
99 737 856	9488.10512
100 262 144	$2^{8}.457.857$
999 737 856	$936.2^{6}.3.5563$
1 000 262 144	$1064.2^{6}.37.397$
9 999 737 856	99488.100512
10 000 262 144	$2^{10}.89.197.557$
100 000 262 144	$2^{11}.41.47.25339$
999 999 737 856	999488.1000512
1 000 000 262 144	$10064.2^{8}.13.73.409$
9 999 999 737 856	$2^{13}.3^{2}.641.211597$
99 999 999 737 856	9999488.10000512
999 999 999 737 856	$99936.2^{10}.3.13.43.5827$
1 000 000 000 262 144	$10064.2^{10}.7^{3}.37.769$

524 288	2^{19}
99 475 712	$2^{8}.7.55511$
100 524 288	$2^{8}.3.19.83^{2}$
999 475 712	$2^{9}.31.62971$
1 000 524 288	$2^{9}.3.23.127.223$
100 000 524 288	$2^{11}.3.7.227.10243$

1 048 576	2^{20}
98 951 424	8976.11024
101 048 576	$2^{8}.394721$
1 001 048 576	$2^{9}.11.177743$
9 998 951 424	98976.101024
10 001 048 576	$2^{10}.29.61.5521$
99 998 951 424	$2^{11}.3.1013.16067$
100 001 048 576	$2^{11}.11.13.341459$

2 097 152	2^{21}
997 902 848	$872.2^{6}.17881$
1 002 097 152	$1128.2^{6}.3.7.661$
10 002 097 152	$2^{10}.3^{2}.17.63841$
100 002 097 152	$2^{11}.3^{7}.83.269$
999 997 902 848	$9872.2^{8}.7.56527$
1 000 002 097 152	$10128.2^{8}.3.128563$
999 999 997 902 848	$99872.2^{10}.19.514639$

4 194 304	2^{22}
995 805 696	$2^{9}.3.648311$
1 004 194 304	$2^{9}.41.47637$
9 995 805 696	97952. 102048
100 004 194 304	$2^{11}.7.23.303293$

8 388 608	2^{23}
10 008 388 608	$2^{10}.3.97.33587$
100 000 008 388 608	$2^{14}.3.17^{2}.83.89.953$

16 777 216	2^{24}
9 983 222 784	95904. 104096
99 983 222 784	$2^{11}.3^{2}.613.8849$
100 016 777 216	$2^{11}.103.251.1889$
999 983 222 784	995904. 1004096
999 999 983 222 784	$99744.2^{10}.3.151.21613$
1 000 000 016 777 216	$100256.2^{10}.7.571.2437$

33 554 432	2^{25}
9 966 445 568	$68.2^{8}.572521$
10 033 554 432	$132.2^{8}.296921$
99 966 445 568	$2^{11}.11.19.233549$
100 033 554 432	$2^{11}.3.7.101.23029$
1 000 033 554 432	$2^{12}.3.11.113.233.281$
9 999 966 445 568	$2^{13}.11.101.569.1931$
999 999 966 445 568	$968.2^{12}.31.761.10691$

67 108 864	2^{26}
99 932 891 136	$2^{11}.3.13.769.1627$
999 932 891 136	991808. 1008192
1 000 067 108 864	$2^{12}.17.41.433.809$

134 217 728	2^{27}
99 865 782 272	$2^{11}.331.147319$
999 865 782 272	$9488.2^{8}.7^{2}.31.271$
1 000 134 217 728	$10512.2^{8}.3.43^{2}.67$
9 999 865 782 272	$2^{13}.71.139.179.691$
1 000 000 134 217 728	$100512.2^{10}.3.7.127.3643$
536 870 912	2^{29}
999 463 129 088	$2^{12}.23.727.14593$
1 073 741 824	2^{30}
998 926 258 176	967232.1032768
1 001 073 741 824	$11024.2^{8}.229.1549$
999 998 926 258 176	$98976.156.2^{8}.31.8161$
8 589 934 592	2^{33}
999 991 410 065 408	$97952.2^{10}.79.126199$
1 000 008 589 934 592	$102048.2^{10}.3.7.455701$
17 179 869 184	2^{34}
99 982 820 130 816	9868928.10131072
100 017 179 869 184	$2^{14}.89^{2}.773.997$
34 359 738 368	2^{35}
999 965 640 261 632	$872.2^{12}.11.31.251.3271$
68 719 476 736	2^{36}
999 931 280 523 264	$95904.2^{10}.3.241.14083$
1 000 068 719 476 736	$104096.2^{10}.7.13.103099$

2' steht schon auf meinem ersten Blatte (S. 390.)

II

	6	12	
4 = . . . 40 000	000	000	000''
800	000	000	000
21	333	333	333
	640	000	000
	20	480	000
		682	666
		23	405
			819
			29
	6	12	1

	40 021 353 836 768
	800 640 683 486
	0. 040 821 994 520 255
	0. 039 220 713 153 281
100	4. 605 170 185 988 091
8. 12 = 96	4. 564 348 191 467 836
104	4. 644 390 899 141 372
8	2. 079 441 541 679 835
13	2. 564 949 357 461 536

III

	6	12	
4 = ... 4 000	000	000	000''
8	000	000	000
	21	333	333
		64	000
	6	12	204

	0. 004 008 021 397 538
	0. 003 992 021 269 537
1000	6. 907 755 278 982 137
996	6. 903 747 257 584 598
12	2. 484 906 649 788 000
83	4. 418 840 607 796 597
1004	6. 911 747 300 251 674
4	1. 386 294 361 119 890
251	5. 525 452 939 131 783

IV

	6 12
	4 = ...400 000 000 000''
	80 000 000
	21 333
	6 12 6
	0. 000 399 920 021 326
10 000	9. 210 340 371 976 182
10 004	9. 210 740 291 997 509
4. 41 = 164	5. 099 866 427 824 198
61	4. 110 873 864 173 311

V

	6 12
	4 = ... 40 000 000 000''
	800 000
	6 12 21
	0. 000 040 000 800 021
	0. 000 039 999 200 021
100 000	11. 512 925 464 970 228
99 996	11. 512 885 464 170 207
12. 13 = 156	5 049 856 007 249 537
641	6. 463 029 456 920 670
100 004	11. 512 965 464 170 249
4. 23 = 92	4. 521 788 577 049 040
1087	6. 991 176 887 121 209

VI

	6 12
	4 = ... 4 000 000 000''
	8 000
	0. 000 003 999 992 000
1 000 000	13. 815 510 557 964 274
1 000 004	13. 815 514 557 956 274
4. 89 = 356	5. 874 930 730 852 030
53^2 = 2809	7. 940 583 827 104 243
53	3. 970 291 913 552 121

VII

	6 12
	4 = ...400 000 000''
	6 12 80
	0. 000 000 400 000 080
10 000 000	16. 118 095 650 958 319
9 999 996	16. 118 095 250 958 239
12. 191 = 2292	7. 737 180 077 834 630
4363	8. 380 915 173 123 609

und so weiter

1, 000

Aus der vorhergehenden Tafel, theils durch Duppliren oder Halbiren, theils unmittelbar.

6 12	''	IV
1.000 000 000 000 000''	8	64 &c.
80 000 000 000 000	1	—
6 400 000 000 000	2	1
512 000 000 000	3	—
40 960 000 000	4	2
3 276 800 000	5	—
262 144 000	6	3
20 971 520	7	—
1 677 721	8	4
134 217	9	—
10 737	10	5
858	11	—
68	12	6
5	13	—

II 6 12

8 = ..80 000 000 000 000''
3 200 000 000 000
170 666 666 666
10 240 000 000
655 360 000
43 690 666
2 995 931
209 715
14 913
1 073
78
6 12 5

	80 171 325 037 589
	3 210 283 901 461
	0. 083 381 608 939 051
	0. 076 961 041 136 128
100	4. 605 170 185 988 091
92	4. 521 788 577 049 040
4	1. 386 294 361 119 890
23	3. 135 494 215 929 149
$2^2 . 3^3 = 108$	4. 682 131 227 124 219

	III 6 12
	8 = .. 8 000 000 000 000''
	32 000 000 000
	170 666 666
	1 024 000
	6 553
	6 12 43
	8 000 170 673 220
	32 001 024 043
	0. 008 032 171 697 264
	0. 007 968 169 649 176
1000	6. 907 755 278 982 137
992	6. 899 723 107 284 872
32	3. 465 735 902 799 726
31	3. 433 987 204 485 146
1008	6. 915 723 448 631 313
$12^2 = 144$	4. 969 813 299 576 000
7	1. 945 910 149 055 313

u. s. w.

	IV 6 12
	64 = .. 6 400 000 000 000''
	20 480 000 000
	87 381 333
	419 430
	2 147
	6 12 11
	6 400 087 383 480
	20 480 419 441
	0. 006 379 606 964 039
10 000	9. 210 340 371 976 182
10 064	9. 216 719 978 940 221
16. 17 = 272	5. 605 802 066 295 997
37	3. 610 917 912 644 224

V
64 =

	v ⁀6⁀ ⁀12⁀
	64 = . . . 640 000 000 000''
	204 800 000
	87 381
	⁀6⁀ ⁀12⁀ 41
	0. 000 640 204 887 423
	0. 000 639 795 287 339
100 000	11. 512 925 464 970 228
99 936	11. 512 285 260 082 805
32. 9 = 288	5. 662 960 480 135 945
347	5. 849 324 779 946 859
100 064	11. 513 565 260 257 567
32. 53 = 1696	7. 436 027 816 351 848
59	4. 077 537 443 905 719

u. s. w.

1. 000 000 000 000 000''	' 16	IV 256 &c.
160 000 000 000 000	1	—
25 600 000 000 000	2	1
4 096 000 000 000	3	—
655 360 000 000	4	2
104 857 600 000	5	—
16 777 216 000	6	3
2 684 354 560	7	—
429 496 729	8	4
68 719 476	9	—
10 995 116	10	5
1 759 218	11	—
281 474	12	6
45 035	13	—
7 205	14	7
1 152	15	—
184	16	8
29	17	—
4	18	9

III 6 12

16 = .. 16 000 000 000 000'

128 000 000 000

1 365 333 333

16 384 000

209 715

2 796

6 12 38

	16 001 365 543 086
	128 016 386 796
	0. 016 129 381 929 883
	0. 015 873 349 156 290
1 000	6. 907 755 278 982 137
984	6. 891 625 897 052 253
24	3. 178 053 830 347 945
41	3. 713 572 066 704 307
1 016	6. 923 628 628 138 427
8	2. 079 441 541 679 835
127	4. 844 187 086 458 591

IV 6 12

16 = ... 1 600 000 000 000''

1 280 000 000

1 365 333

1 638

6 12 2

	0. 001 598 721 363 697
10 000	9. 210 340 371 976 182
10 016	9. 211 939 093 339 879
32	3. 465 735 902 799 726
313	5. 746 203 190 540 153

u. s. w.

IV
256 =

IV

256 = .	25 600 000 000 000″
	327 680 000 000
	5 592 405 333
	107 374 182
	2 199 023
	46 912
	1 029
	23
	25 605 594 605 386
	327 787 421 117
	0. 025 933 382 026 504
	0. 025 277 807 184 268
10 000	9. 210 340 371 976 182
9 744	9. 184 406 989 949 678
16. 21 = 336	5. 817 111 159 963 204
29	3. 367 295 829 986 474
10 256	9. 235 618 179 160 451
16	2. 772 588 722 239 781
641	6. 463 029 456 920 670

V

256 = . . .	2 560 000 000 000″
	3 276 800 000
	5 592 405
	10 737
	21
	0. 002 563 282 403 164
	0. 002 556 728 781 689
100 000	11. 512 925 464 970 228
99 744	11. 510 362 182 567 063
32. 3 = 96	4. 564 348 191 467 836
1 039	6. 946 013 991 099 227
100 256	11. 515 482 193 751 918
32. 13 = 416	6. 030 685 260 261 263
241	5. 484 796 933 490 654

u. s. w.

C *). Eine Tafel von den Dignitäten von ½ oder von 5'.

1.000 000 000 000 000 rc. (6 / 12)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 rc.
500 000 000 000 000	1									
250 000 000 000 000	2	1								
125 000 000 000 000	3	.	1							
62 500 000 000 000	4	2	.	1						
31 250 000 000 000	5	.	.	.	1					
15 625 000 000 000	6	3	2	.	.	1				
7 812 500 000 000	7	.	.	.	.	.	1			
3 906 250 000 000	8	4	.	2	.	.	.	1		
1 953 125 000 000	9	.	3	.	.	.	.	.	1	
976 562 500 000	10	5	.	.	2	.	.	.	.	
488 281 250 000	11	.	.	.	.	.	.	.	.	
244 140 625 000	12	6	4	3	.	2	.	.	.	
122 070 312 500	13	.	.	.	.	.	.	.	.	
61 035 156 250	14	7	.	.	.	.	2	.	.	
30 517 578 125	15	.	5	.	3	.	.	.	.	
15 258 789 062	16	8	.	4	.	.	.	2	.	
7 629 394 531	17	.	.	.	.	.	.	.	.	
3 814 697 265	18	9	6	.	.	3	.	.	2	
1 907 348 632	19	.	.	.	.	.	.	.	.	
953 674 316	20	10	.	5	4	.	.	.	.	
476 837 158	21	.	7	.	.	.	3	.	.	
238 418 579	22	11	.	.	.	.	.	.	.	
119 209 289	23	.	.	.	.	.	.	.	.	
59 604 644	24	12	8	6	.	4	.	3	.	
29 802 322	25	.	.	.	5	.	.	.	.	
14 901 161	26	13	.	.	.	.	.	.	.	
7 450 580	27	.	9	.	.	.	.	.	3	
3 725 290	28	14	.	7	.	.	4	.	.	
1 862 645	29	.	.	.	.	.	.	.	.	
931 322	30	15	10	.	6	5	.	.	.	
465 661	31	.	.	.	.	.	.	.	.	
232 830	32	16	.	8	.	.	.	4	.	
116 415	33	.	11	.	.	.	.	.	.	
58 207	34	17	.	.	.	.	.	.	.	
29 103	35	.	.	.	7	.	5	.	.	
14 551	36	18	12	9	.	6	.	.	4	
7 275	37	.	.	.	.	.	.	.	.	
3 637	38	19	.	.	.	.	.	.	.	
1 818	39	.	13	.	.	.	.	.	.	
909	40	20	.	10	8	.	.	5	.	
454	41	.	.	.	.	.	.	.	.	
227	42	21	14	.	.	7	6		.	
113	43	.	.	.	.	.	.	.	.	
56	44	22	.	11	.	.	.	.	.	
28	45	.	15	.	9	.	.	.	5	
14	46	23	.	.	.	.	.	.	.	
7	47	.	.	.	.	.	.	.	.	
3	48	24	16	12	.	8	.	6	.	

*) Dies war die 3te Probe, bey dem Briefe vom 29. Julii 1774. S. 507. 508.

Aus

Aus einer solchen Tafel können die Logarithmen zu folgenden Zahlen bequem gefunden werden, welche ich aber nur in so weit hersetze, als ich dieselben völlig zergliedert habe.

2	. .
1	. .
3	. .
19	. .
21	3. 7
199	. . . .
201	3. 67
1 999	. . . . .
2 001	3. 23. 29
19 999	7. 2857
20 001	3. 59. 113
199 999	. . . .
200 001	3. 163. 409
1 999 999	17. 71. 1657
2 000 001	3. 666 667
199 999 999	89. 1447. 1553
19 999 999 999	7. 97. 193. 152617
20 000 000 001	3. 19. 1627. 215659

4	2^2
3	(1. 3)
5	. .
39	3. 13.
41	. . . .
399	(19. 21)
401	. . . . .
3 999	3. 31. 43
4 001	. . . .
39 999	(199. 201)
40 001	13. 17. 881
399 999	3. 151. 883
400 001	7. 57143
3 999 999	(1999. 2001)
4 000 001	41. 97561
399 999 999	(19999. 20001)
39 999 999 999	(199999. 200001)
400 000 000 001	7. 19. 41. 317. 641

8	2^3
7	. .
9	3^2
79	. . .
81	3^4
799	17. 47
801	3^2. 89
7 999	(19). 421
8 001	(21). 3. 127
79 999	. . . . . .
80 001	3^3. 2963
799 999	. . . .
800 001	3^2. 103. 863
7 999 999	(199). 7. 5743
8 000 001	(201). 3. 13267
79 999 999	1709. 46811
8 000 000 001	(2001). 3. 7. 61. 3121
90 000 000 001	3^6. 17^2. 379 721
8 000 000 000 001	(20 001). 3. 19. 937. 7489

16	2^4
15	(3. 5)
17	. . .
159	3. 53
161	7. 23
1 599	(39. 41)
1 601	. . . . .
15 999	3. 5333
16 001	. . . . .
159 999	(399. 401)
160 001	. . . . . .
1 599 999	3. 241. 2213
1 600 001	13. 123 077
15 999 999	(3999. 4001)
16 000 001	109. 229. 641
160 000 001	7. 1453. 15731
1 600 000 001	1889. 847009
160 000 000 000 001	7^3. 19. 419. 997. 58771

32	2^5
31	. . .
33	3. 11
319	11. 29
321	3. 107
3 199	7. 457
3 201	3. 11. 97
31 999	11. 2909
32 001	3. 10667
319 999	23. 13913
320 001	3. 11. 9697
3 199 999	(19). 11. 61. 251
3 200 001	(21). 152381
31 999 999	263. 281. 433
32 000 001	3. 11. 17. 57041
319 999 999	11. 149. 195241
320 000 001	3. 3061. 34847
3 199 999 999	7. 3847. 118831
319 999 999 999	(199). 3361. 478 441

64	2^6
63	(7. 9)
65	(5.) 13
639	3^2. 71
641	. . . .
6 399	(79. 81)
6 401	37. 173
63 999	(39). 3. 547
64 001	(41). 7. 223
639 999	(799. 801)
640 001	29^2. 761
6 399 999	3^3. 293. 809
6 400 001	37. 172973
63 999 999	(7999. 8001)
64 000 001	(401). 13. 12277
640 000 001	23. 179. 155453
6 399 999 999	(79 999. 80001)
6 400 000 001	37. 41. 53. 79601
63 999 999 999	(3 999). 3. 13. 410359
64 000 000 001	(4001). 7^2 326449
639 999 999 999	(799 999. 800 001)
63 999 999 999 999	(7999 999. 8000 001)
64 000 000 000 001	(40 001). 97. 373. 44221

128	2^7
127	. . .
129	3. 43
1 279	. . . . .
1 281	3. 7. 61
12 799	. . . . .
12 801	3. 17. 251
127 999	31. 4129
128 001	3. 42 667
1 279 999	7. 182 857
1 280 001	3. 131. 3257
12 799 999	2411. 5309
127 999 999	7937. 16 127
1 279 999 999	(19). 29. 71. 32719
1 280 000 001	(21). 7. 827. 10529
127 999 999 999	359. 449. 794 089

256	2^8
255	(15. 17)
257	. . . .
2 559	3. 853
2 561	13. 197
25 599	(159. 161)
25 601	. . . . . .
255 999	3. 85333
256 001	59. 4339
2 559 999	(1599. 1601)
2 560 001	769. 3329
25 600 001	7^2. 522 449
255 999 999	(15 999. 16001)

512	2^9
511	(7). 73
513	(9). 3. 19
5 119	. . . .
5 121	3^2. 569
51 199	. . . . . .
51 201	3^2. 5689
511 999	(79.) 6481
512 001	(81). 3. 7^2. 43
5 119 999	719. 7121
5 120 001	3^2. 73. 7793
51 199 999	3251. 15749
51 200 001	3^2. 23. 247343
511 999 999	(799). 7. 31. 2953
512 000 001	(801). 3. 213067
512 000 000 001	(8001). 3. 307. 69481

1024

1 024	2^{10}
1 023	(31. 33)
1 025	(5). 5. 41
10 239	3. 3413
10 241	11. 7^2. 19
102 399	(319. 321)
102 401	13. 7877
1 023 999	3. 341 333
1 024 001	11. 127. 733
10 239 999	(3199. 3201)
10 240 001	17. 193. 3121
102 400 001	(41). 11^2. 20641
1 023 999 999	(31999. 32001)
10 240 000 001	11. 7. 2557. 52009
102 399 999 999	(319 999. 320001)

2 048	2^{11}
2 047	23. 89
2 049	3. 683
20 479	. . . . .
20 481	3. 6827
204 799	7. 17. 1721
304 801	3. 19. 3593
2 047 999	839. 2441
2 040 001	3. 109. 6263
20 488 001	3. 83. 233. 353
204 799 999	571. 358 669
204 800 001	3. 7. 29. 523. 643
2 047 999 999	311. 743. 8863
2 048 000 001	3. 43. 659. 24091

4 096	2^{12}
4 095	(63. 65)
4 097	(17). 241
40 959	3^3. 37. 41
40 961	. . . . .
409 599	(639. 641)
409 601	149. 2749
4 095 999	(159). 3. 31. 277
4 096 001	(161). 13. 19. 103
40 959 999	(6399. 6401)
4 095 999 999	(63999. 64001)
4 096 000 001	(1601). 61. 41941
40 960 000 001	139. 251. 691. 1699
409 599 999 999	(639 999. 640001)

8 192	2^{13}
8 191	. . . . .
8 193	3. 2731
81 919	. . . . . .
81 921	3. 7. 47. 83
819 199	191. 4289
819 201	3. 273067
8 191 999	1471. 5569
8 192 001	3. 283. 9649
81 919 999	7. 1033. 11329
819 199 999	6571. 124669
819 200 000 001	3. 1259. 11161. 19433

16 384	2^{14}
16 383	(127. 129)
16 385	5. 29. 113
163 839	3. 13. 4201
163 841	. . . .
1 638 399	(1279. 1281)
1 638 401	41. 89. 449
163 839 999	(12799. 12801)
163 840 001	13. 997. 12641
16 383 999 999	(127999. 128001)

32 768	2^{15}
32 767	(31). 7. 151
32 769	(33). 3. 331
327 679	11. 29789
327 681	3^2. 23. 1583
3 276 801	3^3. 11^2. 17. 59
32 767 999	(319). 139. 739
32 768 001	(321). 3. 7. 4861
327 680 001	3^2. 11. 281. 11779
3 276 799 999	(79). 11. 751. 5021
32 768 000 001	(3201). 3. 19. 179593

65 536	2^{16}
65 535	(255 257)
65 537	. . . . .
655 359	3. 218453
655 361	7. 251. 373
6 553 599	(2559. 2561)
6 553 601	2141. 3061
65 535 999	3. 41. 43. 12391
655 359 999	(25599. 25601)
65 535 999 999	(255999. 256001)
6 553 599 999 999	(2559999. 2560001)
6 553 600 000 001	17^2. 113. 337. 641. 929

131 072	2^{17}
131 071	. . . . . .
131 073	3. 43691
1 310 721	3. 67. 6521
13 107 199	7. 887. 2111
13 107 201	3. 137. 31891
131 071 999	31. 419. 10091
13 107 199 999	151. 179. 239. 2029

262 144	2^{18}
262 143	(511. 513)
262 145	(65). 37. 109
2 621 439	3^2. 291271
2 621 441	131. 20011
26 214 399	(5119. 5121)
262 143 999	(639). 3. 13. 67. 157
262 144 001	(641). 7. 37. 1579
2 621 439 999	(51199. 51201)
2 621 440 001	17. 41. 73. 51521
262 143 999 999	(511999. 512001)
262 144 000 001	(6401). 13^2. 242329
26 214 399 999 999	(5119999. 5120001)
262 144 000 000 001	(64001). 19. 37. 379. 15373

524 288	2^{19}
524 287	. . . . . .
524 289	3. 174763
5 242 879	19. 275941
5 242 881	3. 7. 29. 8609
52 428 799	17. 23. 134089

1 048 576	2^{20}
1 048 575	(1023. 1025)
1 048 577	(17). 61681
10 485 761	11. 13. 73327
104 857 599	(10239. 10241)
10 485 759 999	(102399. 102401)
104 857 599 999	(159). 41. 991. 16231
1 048 575 999 999	(1023999. 1024001)

2 097 152	3^{21}
2 097 151	(127). 7^2. 337
2 097 153	(129). 3. 5419
20 971 521	3^3. 103. 7541
2 097 151 999	(1279). 19. 211. 409
2 097 152 001	(1281). 3. 229. 2383

4 194 304	**2^{22}**
4 194 303	(2047. 2049)
4 194 305	5. 397. 2113
41 943 041	7. 41. 59. 2477
419 430 399	(20479. 20481)
8 388 608	**2^{23}**
8 388 607	47. 178481
8 388 608 001	3. 23. 43. 727. 3889
16 777 216	**2^{24}**
16 777 215	(4095. 4097)
16 777 217	(257). 97. 673
1 677 721 599	(40959. 40961)
1 677 721 601	29. 389. 148721
16 777 216 001	(2561). 7. 127. 7369
167 772 159 999	(409599. 409601)
16 777 215 999 999	(4095999. 4096001)
16 777 216 000 001	(25601). 349. 1009. 1861
33 554 432	**2^{25}**
33 554 431	(31). 601. 1801
33 554 433	(33). 251. 4051
335 544 319	11. 521. 58549
335 544 320	3. 7. 101. 158201
3 355 443 199	281. 367. 32537
3 355 443 199 999	(319). 131. 691. 116201
67 108 864	**2^{26}**
67 108 863	(8191. 8193)
67 108 865	5. 53. 157. 1613
671 088 639	3. 13. 557. 30893
6 710 886 399	(81919. 81921)
134 217 728	**2^{27}**
134 217 727	(511). 262657
134 217 729	(513). 3. 87211
134 217 727 999	(5119). 31. 271. 3121
134 217 727 999 999	(51199). 7. 127. 823. 3583
1 073 741 824	**2^{30}**
1 073 741 823	(32767. 32769)
1 073 741 825	(1025). 13. 61. 1321
107 374 182 399	(327679. 327681)
1 073 741 823 999	(10239). 3. 13. 43. 62533
10 737 418 239 999	(3276799. 3276801)

8 589 934 592	2^{33}
8 589 934 593	(2049). 3. 67. 20857
17 179 869 184	2^{34}
17 179 869 183	(131 071. 131 073)
17 179 869 185	5. 137. 953. 26 317
34 359 738 368	2^{35}
34 359 738 367	(127). 31. 71. 122921
34 359 738 369	(129). 11. 281. 86 171
68 719 476 736	2^{36}
68 719 476 735	(262 143. 262 145)
68 719 476 737	(4097). 433. 38737
549 755 813 888	2^{39}
549 755 813 887	(8191). 7. 79. 121 369
35 184 372 088 832	2^{45}
35 184 372 088 831	(32 767). 73. 631. 23311

$\frac{1}{20}$ = l. 50 000 000 000 000''
1 250 000 000 000
41 666 666 666
1 562 500 000
62 500 000
2 604 166
111 607
4 882
217
9

	50 041 729 278 491
	1 251 565 109 059
	0. 051 293 294 387 540
	0. 048 790 164 169 432
20	2. 995 732 273 553 990
91	2. 944 438 979 166 440
3.7 = 21	3. 044 522 437 723 422

$\frac{1}{200}$ =	.. 5 000 000 000 000''
	12 500 000 000
	41 666 666
	156 250
	625
	6 12 2
	5 000 041 667 291
	12 500 156 252
	0. 005 012 541 823 544
	0. 004 987 541 511 039
200	5. 298 317 366 548 036
199	5. 293 304 824 724 492
201	5. 303 304 908 059 075
3	1. 098 612 288 668 109
67	4. 204 692 619 390 966

$\frac{1}{2000}$ =	... 500 000 000 000''
	125 000 000
	41 666
	6 12 15
	0. 000 500 125 041 682
	0. 000 499 875 041 651
2000	7. 600 902 459 542 082
1999	7. 600 402 334 500 400
2001	7. 601 402 334 583 733
3. 23. = 69	4. 234 106 504 597 259
29	3. 367 295 829 986 474

$\frac{1}{200000}$ =	... 5 000 000 000
	12 500
	0. 000 004 999 987 500
200 000	12. 206 072 645 530 173
200 001	12. 206 077 645 517 673
3. 163 = 489	6. 192 362 489 474 872
409	6. 013 715 156 042 801

$$\frac{1}{20000} = \ldots 50\ 000\ 000\ 000''$$

1 250 000

	6 — 12 — 14
	0. 000 050 001 250 041
	0. 000 049 998 750 041
20 000	9. 903 487 552 536 128
19 999	9. 903 437 551 286 086
7	1. 945 910 149 055 313
2 857	7. 957 527 402 230 773
20 001	9. 903 537 551 286 169
3. 59 = 177	5. 176 149 732 573 829
113	4. 727 387 818 712 340

$$\frac{1}{2\,000\,000} = \ldots 500\ 000\ 000''$$

125

	0. 000 000 500 000 125
2 000 000	14. 508 657 738 524 219
1 999 999	14. 508 657 238 524 094
17.71 = 1207	7 095 893 221 097 531
1657	7. 412 764 017 426 562

$$\frac{1}{200\,000\,000} = \ldots\ 5\ 000\ 000''$$

	0. 000 000 005 000 000''
200 000 000	19. 113 827 924 512 310
199 999 999	19. 113 827 919 512 310
89. 1447	11. 765 884 096 363 623
1553	7. 347 943 823 148 687

$\frac{1}{400}$ = 2 500 000 000 000″ (marks: 6, 12)

	3 125 000 000
	5 208 333
	9 765
	19 (marks: 6, 12)
	2 500 005 208 352
	3 125 009 765
	0. 002 503 130 218 118
	0. 002 496 880 198 587
400	5. 991 464 547 107 981
19. 21 = 399	5. 988 961 416 889 863
401	5. 993 961 427 306 569

$\frac{1}{4000}$ = . . 250 000 000 000″ (marks: 6, 12)

	31 250 000
	5 208 (mark: 6)
	0. 000 250 031 255 209
	0. 000 249 968 755 207
4000	8. 294 049 640 102 027
3999	8. 293 799 608 846 818
3. 31 = 93	4. 532 599 493 153 255
43	3. 761 200 115 693 562
4001	8. 294 299 608 857 235

$\frac{1}{40000}$ = . . 25 000 000 000″ (marks: 6, 12)

	312 500
	5 (mark: 6)
	0. 000 025 000 312 505
	0. 000 024 999 687 505
40 000	10. 596 634 733 096 073
39 999	10. 596 609 732 783 568
3. 67 = 201	5. 303 304 908 059 075
199	5. 293 304 824 724 492
40001	10. 596 659 732 783 578
13. 17 = 221	5. 398 162 701 517 752
181	5. 198 497 021 265 825

$\frac{1}{400000}$

$$\frac{1}{400000} = \ldots 2\ \overset{6}{5}00\ 000\ \overset{12}{0}00''$$

3 125

	0. 000 002 500 003 125
400 000	12. 899 219 826 090 119
399 999	12. 899 217 326 086 994
3. 151 = 453	6. 115 892 125 483 034
883	6. 783 325 200 603 960

$$\frac{1}{4\,000\,000} = \ldots \overset{6}{2}50\ 000\ \overset{12}{0}00''$$

31

	0. 000 000 250 000 031
4 000 000	15. 201 804 919 084 164
3 999 999	15. 201 804 669 084 133
3. 23. 29 = 2001	7. 601 402 334 583 733
1 999	7. 600 402 334 500 400

u. s. w.

$$\frac{1}{800} = \ldots 1\ \overset{6}{2}50\ 000\ \overset{12}{0}00\ 000''$$

781 250 000

651 041

610

	0. 001 250 781 901 652
	0. 001 249 219 400 431
800	6. 684 611 727 667 927
799	6. 683 360 945 766 274
17	2. 833 213 344 056 216
47	3. 850 147 601 710 058
801	6. 685 860 947 068 359
9	2. 197 224 577 336 219
89	4. 488 636 369 732 139

6 12

$\frac{1}{8000}$ = . . . 125 000 000 000″

7 812 500

6 12 651

	0. 000 125 007 813 151
	0. 000 124 992 188 150
8000	8. 987 196 820 661 972
7999	8. 987 071 812 848 821
19	2. 944 438 979 166 440
421	6. 042 632 833 682 381 +
8001	8. 987 321 812 850 123
7. 9 = 63	4. 143 134 726 391 532
127	4. 844 187 086 458 591

VII 6 12

125 = ... 12 500 000 000″

78 125

	0. 000 012 499 921 875
80 000	11. 289 781 913 656 018
80 001	11. 289 794 413 577 894
27	3. 295 836 866 004 329
2963	7. 993 957 547 573 565

IIX 6 12

125 = ... 1 250 000 000″

781

	0. 000 001 249 999 218
800 000	13. 592 367 006 650 064
800 001	13. 592 368 256 649 283
9. 103 = 927	6. 831 953 565 565 855
863	6. 760 414 691 083 427

IX 6 12

125 = ... 125 000 000″

6 12 7

	0. 000 000 125 000 007
8 000 000	15. 894 952 099 644 110
7 999 999	15. 894 951 974 644 102
7. 199 = 1393	7. 239 214 973 779 805
5743	8. 655 737 000 864 296

XII   6   13

	125 = ... 125 000''
	0. 000 000 000 124 999
8 000 000 000	22. 802 707 378 626 247
8 000 000 001	22. 802 707 378 626 247
9. 7. 23. 29. 61	14. 756 798 636 480 467
3 121	8. 045 908 742 270 779

XV   6   12

	125 = ... 125''
	0. 000 000 000 000 124
8 000 000 000 000	29. 710 462 657 608 384
8 000 000 000 001	29. 710 462 657 608 509
9. 19. 59. 113. 937	20. 789 272 101 359 142
7 489	8. 921 190 556 249 367

$\frac{\overline{1}}{160}$ = . 6 250 000 000 000''
19 531 250 000
81 380 208
381 469
1 907
9

(6)   (12)

	6 250 081 382 115
	19 531 631 479
	0. 006 269 613 013 595
	0. 006 230 549 750 636
160	5. 075 173 815 233 826
159	5. 068 904 202 220 231
3	1. 098 612 288 668 109
53	3. 970 291 913 552 121
161	5. 081 404 364 984 462
7	1. 945 910 149 055 313
23	3. 135 494 215 929 149

$$\frac{1}{1600} = \ldots 625\ 000\ 000\ 000''$$

	195 212 500
	(6) (12) 38
	0. 000 624 804 768 842
1600	7. 377 758 908 227 872
1601	7. 378 383 712 996 714

$$\frac{1}{16000} = \ldots 62\ 500\ 000\ 000''$$

	1 953 125
	(6) 81
	0. 000 062 501 953 206
16 000	9. 680 344 001 221 918
15 999	9. 680 281 499 268 711
3	1. 098 612 288 668 109
5 333	8. 581 669 210 600 602

$$\frac{1}{1600000} = \ldots 625\ 000\ 000$$

	(6) (12) 159
	0. 000 000 625 000 195
1600 000	14. 285 514 187 210 009
1599 999	14. 285 513 562 209 814
3 · 241 = 723	6. 583 409 222 158 764
2213	7. 702 104 340 051 049

$$\frac{1}{16\,000\,000} = \ldots 62\ 500\ 000''$$

	(6) 1
	0. 000 000 062 500 001
	0. 000 000 062 499 998
16 000 000	16. 588 099 280 204 055
15 999 999	16. 588 099 217 704 053
43 · 93 = 3999	8. 293 799 608 846 818
4 001	8. 294 299 608 857 235
16 000 001	16. 588 099 342 704 053
109. 641	11. 154 377 339 149 813
229	5. 433 722 003 554 239

$\frac{1}{320} = .\ 3\ \overset{6}{\smile}125\ 000\ \overset{12}{\smile}000\ 000''$

	4 882 812 500
	10 172 526
	23 841
	(6) (12) 59
	3 125 010 172 585
	4 882 836 342
	0. 003 129 893 008 927
	0. 003 120 127 336 243
320	5. 768 320 995 793 772
319	5. 765 191 102 784 844
11	2. 397 895 272 798 370
29	3. 367 295 829 986 474
321	5. 771 441 123 130 015
3	1. 098 612 288 668 109
107	4. 672 828 834 461 906

$\frac{1}{3200} = ..\ 312\ \overset{6}{\smile}500\ 000\ \overset{12}{\smile}000''$

	48 828 125
	10 172
	(6) (12) 2
	0. 000 312 548 838 299
	0. 000 312 451 182 045
3 200	8. 070 906 088 787 817
3 199	8. 070 593 539 949 518
7	1. 945 910 149 055 313
457	6. 124 683 390 894 204
3 201	8. 071 218 539 969 863
33	3. 496 507 561 466 480
97	4. 574 710 978 503 382

$\frac{1}{32000} = ...\ 31\ \overset{6}{\smile}250\ 000\ \overset{12}{\smile}000''$

	488 281
	(6) 10
	0. 000 031 250 488 291
32 000	10. 373 491 181 781 863
31 999	10. 373 459 931 293 572
11	2. 397 895 272 798 370
2 909	7. 975 564 658 495 201

u. s. w.

$$\frac{1}{1\,073\,741\,824} = \underset{6}{\smile} \ldots\ldots \overset{19}{\smile} 931\;322''$$

	0. 000 000 000 931 322
1 073 741 824	20. 794 415 416 798 359
1 073 741 825	20. 794 415 417 729 681
$5^2 . 13 . 41 . 61$	13. 608 271 113 207 356
1 321	7. 186 144 304 522 325

5. Zu S. 517, in fine.

Der erste Weg (den Logarithmen von der Primzahl 3343 zu finden, wenn die vorhergehenden kleinern Logarithmen bekannt sind) ist Brüche zu finden, deren Zähler eins größer als der Nenner, und die keinen größern Primfactoren haben als die gegebene Primzahl, hier z. E. 3343, ist, und zweytens in deren Nenner oder Zähler die gegebene Primzahl enthalten ist. Dieses giebt zween Fälle, nachdem die Primzahl entweder im Nenner oder im Zähler seyn soll.

Erster Fall, wenn die Primzahl im Nenner sich befinden soll, das ist: wenn man den Logarithmen nach der ersten Formel suchen will.

3 343 = a
10 029 = 3a
300 87
2 340 1
2 650 999 = 793a
10 029
12 679 999 = 3793a
133 72
146 399 999 = 43793a
668 6
814 999 999 = 243793a = 11. 88643a
16715
17529 999 999 = 5 243 793a = 3. 23. 75997

Weil 3793 und 43793 Primzahlen sind, und die zwey folgenden Multipel 243 793a und 5 243 973a, größere Primfactores enthalten als 3343, so sind dieselben nicht zu gebrauchen. Nimmt man aber anstatt der zwey ersten 13 793a = 13. 1061a, und 143 793a = 3^2. 13. 1229a, so hat man nebst 793a, drey Multipel und folglich 3 Brüche den Log. 3343 zu finden; nemlich es ist $\frac{1}{1-n} = \frac{2651000}{2650999}$ oder $\frac{46110000}{46109999}$ oder $\frac{480600000}{480599999}$, und $n = \frac{1}{2651000}$ oder $\frac{1}{46110000}$ oder $\frac{1}{480600000}$.

 Zwey=

Zweyter Fall, wenn die Primzahl im Zähler stecken soll, oder der Logarithmus nach der zweyten Formel soll gefunden werden.

$$\begin{array}{l}
\underline{3343 = a} \\
23401 = 7a \\
\underline{6686} \\
692001 = 207a \\
\underline{20058} \\
20750001 = 6207a = 3 \cdot 2069a \\
\underline{16715} \\
187900001 = 56207a \\
\underline{23401} \\
2528000001 = 756207a = 3^2 \cdot 73 \cdot 1151a \\
\underline{13372} \\
15900000001 = 4756207a = 1823 \cdot 2609a.
\end{array}$$

Wie die Logarithmen zu diesen Brüchen, und aus solchen der Logarithme von 3343 zu finden, habe ich hier nicht nöthig auszuführen.

$\frac{1+n}{1} = \frac{23401}{23400}$ oder $\frac{692001}{692000}$ oder $\frac{20750001}{20750000}$ oder $\frac{2528000001}{2528000000}$ oder $\frac{15900000001}{15900000000}$, und

$n = \frac{1}{23400}$ oder $\frac{1}{692000}$ oder $\frac{1}{20750000}$ oder $\frac{1}{2528000000}$ oder $\frac{1}{15900000000}$

Zu

Zu merken ist, daß 5243793a
+4756207a

Summa 10000000a

Als auch daß:

$$\left.\begin{array}{r} 2651 + 692 = \\ 1268 + 2075 = \\ 1464 + 1879 = \\ 815 + 2528 = \\ 1753 + 1590 = \end{array}\right\} 3343.$$

Der zweyte Weg ist, Brüche zu finden, deren Zähler unbestimmt größer ist als der Nenner, und davon einer die gegebene Primzahl als ihren größten Primfactor enthält, der andere aber, nemlich der Zähler oder der Nenner, nur aus der Dignität von 10 besteht.

3343 = a

10029 ... = 3a
30087

9998913 = 2991a
10029

99999159 = 29913a = 3. 13^2. 59a
6686

999998276 = 299132a = 2^2. 17. 53. 83a
16715 299133a = 3^5. 1213a

9999999475 = 2991325a = 5^2. 119653a
3343 2991324a = 2^2. 3. 7. 149. 239a
2991326a = 2. 13. 103. 1117a

99999998093 = 29913251a = 17. 43. 151. 271a
20058 29913252a = 2^2. 3. 1279. 1949a

1000000000988 = 299132516a = 2^2. 31. 827. 2917a

Wenn man 10029 mitnimmt, so hat man hier 9 Multipel, wodurch der Log. von 3343 zu finden ist, und zwar nach der ersten Formel ist

$$\overset{IIX}{n = 841} \text{ oder } \overset{IX}{1724} \text{ oder } \overset{X}{3868} \text{ oder } \overset{XI}{1907},$$

und nach der zweyten Formel ist

$$\overset{IV}{n = 29} \text{ oder } \overset{IX}{1619} \text{ oder } \overset{X}{2828} \text{ oder } \overset{XI}{1436} \text{ oder } \overset{XII}{988}.$$

Nach diesem Wege berechne ich den Logarithmen für die Peripherie des Circuls auf die folgende Art.

3.141 592 653 589 793 238 462″ &c.
1.000 000 357 564 167 085 735″ V (0.31831 (= 139. 229)

6 12 18

r, m = 0.434 294 481 903 251 827 651 | 357 564 167 085 735″ = n

mn = 155 288 144 691 667 | 1

mn^2 = 55 525 476 | 2

mn^3 = 19 | 3

357 564 &c. = ... 155 288 144 691 667″

27 762 738

1 000 000.357 564 167 085 735 | 6.000 000 155 288 116 928 935

(139. 2290) | 5.502 850 282 593 983 074 584

3.141 592 653 589 793 238 462 | 0.497 149 872 694 133 854 351

&c.

Anders:

3.141 592 653 589 793 238 462″
0.999 999 980 573 048 654 959 (0.318 309 88 (= $2^2 . 7^2 . 23^2 . 307$)

6 12 18 | 12 18

m = 0. 434 294 481 903 251 827 651″ | 19 426 951 345 040″ = n

mn = 8 437 017 769 353 | 1

mn^2 = 163 905 | 2

19 426 &c. = ... 8 437 017 769 353″ (marks: 18; 12, 18)

	81 952 (mark: 6)
(marks: 6, 12)	0. 000 000 008 437 017 851 306
999 999 980.573 048 654 959″	8. 999 999 991 562 982 148 693
(322². 3070)	8. 502 850 118 868 848 294 342
(mark: 6)	
3. 141 592 653 589 793 238 462″	0. 497 194 872 694 133 854 351″

Noch anders:

(marks: 6, 12, 18)

$$\frac{3.\ 141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462''}{0.\ 999\ 999\ 915\ 086\ 328\ 551\ 961}\ \left(\frac{113}{355}\right.$$

(marks: 6, 12, 18)	(marks: 12, 18)
m = 0. 434 294 481 903 251 827 651″	84 913 671 448 038″ = n
mn = 36 877 538 948 028	1
mn² = 3 131 407	2

84 913 &c. = ... 36 877 538 948 028″ (marks: 12; 12, 18)

	1 565 703 (mark: 6)
1000.000 000 000 000 000 000″	0. 000 000 036 877 540 513 732
999 999 915 086 328 551 961″	
355 / 113 (marks: 6, 12)	0. 497 149 909 571 624 368 083
3.141 592 653 589 793 238 462	0. 497 149 872 694 133 854 351″

In vorigen Rechnungen kömmt es hauptsächlich auf die Zergliederung der Zahlen an, worinn aber Ihre Zergliederung bis auf eine Million, vornemlich ihren Nutzen zeigen kann. Ob nun bey solchen Rechnungen noch Nebentabellen nöthig und nützlich seyn können, solches hoffe ich nächstens von Ihnen zu erfahren.

Zusätze zu der Berechnung des Logarithmen von 3343. *)

234	$2 \cdot 3^2 \cdot 13$
233	. .
235	5. 47
2 339	. . . .
2 341	. . . .
23 399	. . . . .
23 401	7. 3343
233 999	211. 1109
234 001	29. 8069
2 339 999	17. 59. 2333
2 340 001	. . . .
233 999 999	23. 227. 44819
2 339 999 999	877. 977. 2731
2 340 000 001	31. 1051. 71821

692	$2^2 \cdot 173$
692 001	$3^2 \cdot 23 \cdot 3343$
691 999 999	257. 1433. 1879
692 000 001	$3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4919$

159	3. 53
1 589 999	541. 2939
159 000 001	4357. 36493
1 589 999 999	7. 2729. 83233
15 900 000 001	1823. 2609. 3343

29	. .
9 971	$13^2 \cdot 59$
10 029	3. 3343
99 971	. . . . . .
100 029	3. 33343
999 971	7. 23. 6211
1 000 029	3. 31. 10753
9 999 971	. . . .
10 000 029	3. 13. 17. 15083
100 000 029	3. 53. 131. 4801
9 999 999 971	13. 109. 1657. 4259
10 000 000 029	3. 19. 4447. 39451

*) Diese Zusätze waren eine Beylage zu dem nächstfolgenden Briefe vom 2ten April 1776.

1 619	. . .
999 998 381	127 . 1907 . 4129
1 000 001 619	3^5 . 1213 . 3343
100 000 001 619	3^2 . 7 . 43 . 977 . 37783

3 868	2^2 . 967
999 996 132	2^2 . 3 . 43 . 491 . 3947
9 999 996 132	2^3 . 3 . 7 . 149 . 239 . 3343

988	2^2 . 13 . 19
10 000 988	2^2 . 457 . 547
1 000 000 988	2^2 . 7 . 41 . 821 . 1061
999 999 999 012	2^2 . 3 . 7 . 1279 . 2417 . 3851
1 000 000 000 988	2^2 . 31 . 827 . 2917 . 3343

Ich habe nur die folgenden zwey angewandt, den Logarithmus von 3343 zu berechnen.

29	1
841	2
24 389	3
707 281	4
20 511 149	5
594 823 321	6
17 249 876 309	7
500 246 412 961	8
u. s. f.	

```
IV           6       12        18
29 = ..2 900 000 000 000 000 000''
           4 205 000 000 000 000
               8 129 666 666 666
                  17 682 025 000
                      41 022 298
                          99 137
             6        12    18 246
```

	2 900 008 129 707 689 211
	4 205 017 682 124 137
	0. 002 904 213 147 398 813 348
	0. 002 895 803 112 025 565 073
10 000	9. 210 340 371 976 182 736 071
13^2 . 59 = 9971	9. 207 436 158 828 792 922 723
10 029	9. 213 236 175 088 208 301 145
3	1. 098 612 288 668 109 691 395
3343	8. 114 623 886 420 098 609 749

VI
29 =

VI 6 12 18

29 = ... 29 000 000 000 000 000''
420 500 000 000
8 129 666
6 12 176

	0. 000 029 000 420 508 129 843
1 000 000	13. 815 510 557 964 274 104 107
999 971	13. 815 481 557 543 765 974 264
7. 23 = 161	5. 081 404 364 984 462 995 912
6 211	8. 734 077 192 559 302 978 352

IIX 6 12 18

29 = ... 290 000 000 000 000''
42 050 000
6 12 18 8

	0. 000 000 289 999 957 950 008
100 000 000	18. 420 680 743 952 365 472 143
100 000 029	18. 420 681 033 952 323 422 152
3. 53. 131	9. 944 101 525 421 383 069 689
4 801	8. 476 579 508 530 940 352 462

X 12 18

29 = ... 2 900 000 000 000''
6 12 4 205

	0. 000 000 002 900 000 004 205
10 000 000 000	23. 025 850 929 940 456 840 179
9 999 999 971	23. 025 850 927 040 456 835 974
13. 109. 1657	14. 669 061 257 117 243 348 335
4 259	8. 356 789 669 923 213 487 639

988	1
976 144	2
964 430 272	3
952 857 108 736	4
941 422 823 431 168	5
930 125 749 549 993 984	6

VII 6 12 18

988 = ...98 800 000 000 000 000''
4 880 720 000 000
321 476 757
23 821

6 12 18 1

	0. 000 098 795 119 601 452 937
10 000 000	16. 118 095 650 958 319 788 125
10 000 988	16. 118 194 446 077 921 241 063
4. 457 = 1828	7. 510 977 752 014 094 318 027
5471	8. 607 216 694 063 825 923 036

IX 6 12 18

988 = ...988 000 000 000 000''
488 072 000

6 12 321

	0. 000 000 987 999 511 928 321
1 000 000 000	20. 723 265 836 946 411 156 161
1 000 000 988	20. 723 266 824 945 923 084 483
28. 41. 821	13. 756 299 686 331 939 949 421
1 061	6. 966 967 138 613 983 135 061

XII 12 18

988 = ... 988 000 000 000''

6 488

	0. 000 000 000 988 000 000 488
	0. 000 000 000 987 999 999 511
1 000 000 000 000	27. 631 021 115 928 548 208 215
999 999 999 012	27. 631 021 114 940 548 207 727
84. 1279. 2417	19. 374 932 981 125 639 317 055
3 851	8. 256 088 133 814 908 890 672
1 000 000 000 988	27. 631 021 116 916 548 207 727
4. 31. 827. 2917	19. 516 397 230 496 449 597 977
3343	8. 114 623 886 420 098 609 749

Ich habe nun aus Sherwin ersehen und erkannt, daß diese Rechnungsart, nichts anders als nur eine verbesserte von dem D. Wallis ist.

Abriß

6. Abriß von meiner Zergliederung der Zahlen.

Es wird hier ein solcher Entwurf einer Tafel, als in den Beyträgen zur Mathematik, 2. Bande, S. 52. sich befindet, vorausgesetzt. In welcher aber noch vorne alle Horizontalreihen, von oben herunter mit 1, 2, 3, 4, u. s. w. und alle Perpendicularreihen, oben von der linken nach der rechten Hand, mit 1, 2, 3, 4, 5 u. s. f. bezeichnet sind. Dann sind alle Zahlen in der Tafel durch 2 Zahlen, der Breite und der Länge nach bestimmt.

Die Nro. II. unter den Primzahlen stehenden Zahlen, sind die Weiten der Stellen, aus der darüberstehenden Tafel I., in einer solchen Tafel als in den Beyträgen, abgezählet, d. i. von 7 bis 49, 12. von 49 bis 77, 7. von 77 bis 91, 4. von da bis 119, 7, bis 133, 4. u. s. w.

Die Nro. III. stehenden Formeln, der darüber II. und darunter IV. stehenden Zahlen, habe ich aus bloßem Versuche gefunden.

Durch diese Formeln kann man, für alle und jede Zahlen in der Tafel (in den Beyträgen) es mögen Prim- oder Componirtezahlen seyn, ihre Stellen, der Breite und Länge nach bestimmen, in welcher sie wieder vorkommen, oder wo sie Factores sind. Z. E. von 7 und 307, 607, 907, u. s. w.

I.	1	1	7	11	13	17	19	23	29
	2	7	49	77	91	119	133	161	203
	3	11	77	121	143	187	209	253	319
	4	13	91	143	169	221	247	299	377
	5	17	119	187	221	289	323	391	493
	6	19	133	209	247	323	361	437	551
	7	23	161	253	299	391	437	529	667
	8	29	203	319	377	493	551	667	841

II.	= a	1	7	11	13	17	19	23	29	
		1	12	18	21	27	30	36	47	
		1	7	12	14	18	20	25	31	
		1	4	6	7	9	20	12	15	
		1	7	11	13	19	21	25	31	
		1	4	6	7	9	10	12	15	
		1	7	12	14	18	20	25	31	
		1	12	18	21	27	30	36	47	
2a —	1 =	1	3	5	7	9	11	13	15 =	= n

III,

III.	3n — 2	3(n + 1)	3(n+1)	3n	3n	3(n—1)	3(n—1)	3n+2
	2n — 1	2(n+1)—1	2(n+1)	2n	2n	2(n—1)	2(n—1)+1	2n+1
	n	n + 1	n+1	n	n	n—1	n—1	n
	2n — 1	2(n+1)—1	2(n+1)—1	2n—1	2n+1	2(n—1)+1	2(n—1)+1	2n+1
	n	n + 1	n+1	n	n	n—1	n—1	n
	2n — 1	2(n+1)—1	3(n+1)	2n	2n	2(n—1)	2(n—1)+1	2n+1
	3n — 2	3(n+1)	n+1)	3n	3n	3(n—1)	3(n—1)	3n+2
	n	n	n	n	n	n	n	n

IV.	1	1	7	3	11	5	13	7	17	9	19	11	23	13	29	15
	31	17	37	19	41	21	43	23	47	25	49	27	53	29	59	31
	61	33	67	35	71	37	73	39	77	41	79	43	83	45	89	47
	91	49	97	51	101	53	103	55	107	57	109	59	113	61	119	63
	121	65	127	67	131	69	133	71	137	73	139	75	143	77	149	79
	151	81	157	83	161	85	163	87	167	89	169	91	173	93	179	95
	181	97	187	99	191	101	193	103	197	105	199	107	203	109	209	111
	211	113	217	115	221	117	223	119	227	121	229	123	233	125	239	127
	241	129	247	131	251	133	253	135	257	137	259	139	263	141	269	143
	271	145	277	147	281	149	283	151	287	153	289	155	293	157	299	159

7	307	607	2	.	2																											
12	6	12	14	1	8	70	.	38	46	.	69	22	.	100	78	.	130	54	.	161	30	.	192	6	6	223	62	.	253	38	.	284
7	4	8	21	.	12	77	.	42	53	.	73	29	.	104	5	4	135	61	.	165	37	.	196	13	.	227	69	.	257	45	.	288
4	2	4	25	.	14	1	2	45	57	.	75	33	.	106	9	.	137	65	.	167	41	.	198	17	.	229	73	.	259	49	.	290
7	4	8	32	.	18	8	.	49	64	.	79	40	.	110	16	.	141	72	.	171	48	.	202	24	.	233	80	.	263	56	.	294
4	2	4	36	.	20	12	.	51	68	.	81	44	.	112	20	.	143	76	.	173	52	.	204	28	.	235	4	7	266	60	.	296
7	4	8	43	.	24	19	.	55	75	.	85	51	.	116	27	.	147	3	5	178	59	.	208	35	.	239	11	.	270	67	.	300
12	6	12	55	.	30	31	.	61	7	3	92	63	.	122	39	.	153	15	.	184	71	.	214	47	.	245	23	.	276	79	.	306
3	2	4	58	.	32	34	.	63	10	.	94	66	.	124	42	.	155	18	.	186	74	.	216	50	.	247	26	.	278	2	8	309

𝔑

7.

7.						
=	1	=	5	=	6	=
2	8	7	9	3	13	4
14	12	10	16	15	17	11
21	19	22	20	18	24	23
25	31	29	27	30	28	26
32	34	33	39	37	35	38
36	46	40	42	41	47	45
43	53	44	54	48	50	49
55	57	51	61	52	62	56
58	64	63	65	59	69	60
70	68	66	72	71	73	67
77	75	78	76	74	80	79
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
u. s. unendlich f.						

Perpendicular = Horizontal = Reihen.

307.				
2	2	309	616	923
14	8	315	622	929
21	12	319	626	933
25	14	321	628	935
32	18	325	632	939
36	20	327	634	941
43	24	331	638	945
55	30	337	644	951
58	32	339	646	953
70	38	345	652	959
77	42	349	656	963
1	45	352	659	966
8	49	356	663	970
12	51	358	665	972
19	55	362	669	976
31	61	368	675	982
34	63	370	677	984
46	69	376	683	990
53	73	380	687	997
2c.				
Horizontal=	Perpendicular= Reihen.			

607.				
2	3	610	1217
14	15	622	1229
21	23	630	1237
25	27	634	1241
32	35	642	1249
36	39	646	1253
43	47	654	1261
55	59	666	1273
58	63	670	1277
70	75	682	1289
77	83	690	1297
1	88	695	1302
8	96	703	1310
12	100	707	1314
19	108	715	1322
31	120	727	1334
34	124	731	1338
46	136	743	1350
53	144	751	1358
2c.			

Solchergestalt habe ich erstlich von allen Primzahlen besondere Tafeln verfertiget, und hernach dieselbe in einer allgemeinen Tafel eingetragen. Man kann aber auch dergleichen Tafeln von den componirten Zahlen aufmachen. Z. E. von 49, 77, 91, 2c.

7. Zu S. 523.

Hier folget das angeführte und zurückgelegte:

Etwas von der Berechnung der Sinus und Cosinus.

(6) (12) (18)

B. $11\frac{1}{4}^{\circ}$ = 0. 196 349 540 849 362 077
1 261 648 627 941 887
2 432 025 947 454
2 232 434 337
1 195 380
419

0. 196 351 972 876 504 911
1 261 650 860 376 643

S. $11\frac{1}{4}^{\circ}$ = 0. 195 090 322 016 128 268

B. $1\frac{1}{8}^{\circ}$ = . . 0. 019 634 954 084 936 207 740
1 261 648 627 941 887
24 320 259 475
223 243
1

0. 019 634 954 109 256 467 216
1 261 648 628 165 130

S. $1\frac{1}{8}^{\circ}$ = . . . 0. 019 633 692 460 628 302 086

B. $6'\frac{3}{4}$ = 0. 001 963 495 408 493 620 774 039
1 261 648 627 941 887
243 202 595
22

S. $6'\frac{3}{4}$ = 0. 001 963 494 146 845 236 034 725

(6) (12) (18)

1. 000 000 000 000 000 000
19 276 571 095 877 654
61 931 032 202 404
79 587 863 019
54 792 182
23 471
7

1. 000 061 931 086 994 593
19 276 650 683 764 144

Cos. $11\frac{1}{4}^{\circ}$ = 0. 980 785 280 403 230 449

1. 000 000 000 000 000 000 000
192 765 710 958 776 535
6 193 103 220 240
79 587 863
548

1. 000 000 006 193 103 220 788
192 765 711 038 364 398

Cos. $1\frac{1}{8}^{\circ}$ = 0. 999 807 240 482 064 856 390

(6) (12) (18) (24)

1. 000 000 000 000 000 000 000 000
1 927 657 109 587 765 355
619 310 322 024
79 588

Cos. $6\frac{3}{4}^{\prime}$ = 0. 999 998 072 343 509 722 477 081

0.785 398 163 397 448 309 615 660 845
3) 261 799 387 799 149 436 538 553 615
87 266 462 599 716 478 846 184 538
29 088 820 866 572 159 615 394 846

308 425 137 534 042 456 838
3^2) 34 269 459 726 004 717 426
3 807 717 747 333 857 492
423 079 749 703 761 944

80 745 512 188 280 781 .
3^3) 2 990 574 525 491 880 8
110 762 019 462 662 2
4 102 297 017 135 6

15 854 344 243 815 50. .
3^4) 195 732 644 985 376 6
2 416 452 407 226 7
29 832 745 768 2

2 490 394 570 192 72 . .
3^5) 10 248 537 325 8960
42 175 050 7238
173 559 8795

325 991 886 927 39 . .
3^6) 447 176 799 6260
613 411 2477
841 4420

36 576 204 182 18 . .
3^7) 16 724 373 1971
7 647 1756
3 4966

3 590 860 448 59 . .
3^8) 547 303 8330
83 4177
127

313 361 689 04 . .
3^9) 15 920 4231
8088

24 611 369 50 . .
3^{10}) 4167957
70

1 757 247 67 . .
3^{11}) 9 9197

115 011 59 . .
3^{12}) 2164

6 948 45 . .
3^{13}) 43

0. 261 799 387 799 149 437
2 990 574 525 491 881
10 248 537 325 896
16 724 373 197
15 920 423
9 920
4

0. 261 809 636 352 395 760
2 990 591 249 874 998

S. 15 = 0. 258 819 045 102 520 762

1. 000 000 000 000 000 000
34 269 459 726 004 717
195 732 644 985 377
447 176 799 626
547 303 833
416 796
216

1. 000 195 733 192 289 426
34 269 906 903 221 139

Cos. 15° = 0. 965 925 826 289 068 287

𝔅. 1½° = 0, 026 179 938 779 914 943 654
2 990 574 525 491 881
102 485 373 259
1 672 437
16

0. 026 179 938 882 400 316 929
2 990 574 527 164 318

S. 1½° = 0. 026 176 948 307 873 152 611

𝔅. 9′ = 0. 002 617 993 877 991 494 365 386
2 990 574 525 491 881
1 024 853 733
167

S. 9′ = 0. 002 617 990 887 417 993 727 071

𝔅. 54″ = 0. 000 261 799 387 799 149 436 538 554
2 990 574 525 491 881
10 248 537

S. 54″ = 0. 000 261 799 384 808 574 921 295 210

1. 000 000 000 000 000 000 000
342 694 597 260 047 174
19 573 264 498 538
447 176 800
5 473

1. 000 000 019 573 264 504 011
342 694 597 707 223 974

Cos. 1½° = 0. 999 657 324 975 557 280 037

1. 000 000 000 000 000 000 000 000
3 426 945 972 600 471 743
1 957 326 449 854
447 177

Cos. 9′ = 0. 999 996 573 055 984 725 530 934

1. 000 000 000 000 000 000 000 000 000
34 269 459 726 004 717 426
195 732 644 985
447

Cos. 54″ = 0. 999 999 965 730 540 469 727 927 112

𝔅. 5° = 𝔑 3

𝔅. $\frac{5}{1}$° =

6 12 18
𝔅. 5° = 0. 087 266 462 599 716 479
110 762 019 462 662
42 175 050 724
7 647 176
809

0. 087 266 504 774 768 012
110 762 027 109 838

S. 5° = 0. 087 155 742 747 658 174

6 12 18
𝔅. 30′ = 0. 008 726 646 259 971 647 885
110 762 019 462 662
421 750 507
765

S. 30′ = 0. 008 726 635 498 373 934 965

6 12 18 24
𝔅. 3′ = 0. 000 872 664 625 997 164 788 462
110 762 019 462 662
4 217 505

S. 3′ = 0. 000 872 664 515 235 149 543 305

6 12 18 24
𝔅. 18″ = 0. 000 087 266 462 599 716 478 846 185
110 762 019 462 662
42 175

S. 18″ = 0. 000 087 266 462 488 954 459 425 698

6 12 18
1. 000 000 000 000 000 000
3 807 717 747 333 857
2 416 452 407 227
613 411 248
83 418
7

1. 000 002 416 452 490 645
3 807 718 360 745 112

Cos. 5° = 0. 996 194 698 091 745 533

6 12 18
1. 000 000 000 000 000 000 000
38 077 177 473 338 575
241 645 240 723
613 411

Cos. 30′ = 0. 999 961 923 064 171 288 737

6 12 18 24
1. 000 000 000 000 000 000 000 000
380 771 774 733 385 749
24 164 524 072
613

Cos. 3′ = 0. 999 999 619 228 249 431 137 710

6 12 18 24
1. 000 000 000 000 000 000 000 000 000
3 807 717 747 333 857 492
2 416 452 407

Cos. 18″ = 0. 999 999 996 192 282 255 082 594 915

𝔅. $1\frac{2}{3}^{\circ}$ = 0. 029 088 820 866 572 159 6
4 102 297 017 135 6
173 559 879 5
3 496 7

0. 029 088 821 040 132 039 1
4 102 297 020 632 3

S. $1\frac{2}{3}^{\circ}$ = 0. 029 084 718 743 111 406 8

𝔅. 10′ = 0. 002 908 882 086 657 215 961 5
4 102 297 017 135 6
1 735 598 8
3

S. 10′ = 0. 002 908 877 984 361 934 424 4

𝔅. 1′ = 0. 000 290 888 208 665 721 596 153 9
4 102 297 017 135 6
17 356 0

S. 1′ = 0. 000 290 888 204 563 424 596 374 3

𝔅. 6″ = 0. 000 029 088 820 866 572 159 615 394 8
4 102 297 017 135 6
173 6

S. 6″ = 0. 000 029 088 820 862 469 862 598 432 8

1. 000 000 000 000 000 000 0
423 079 749 703 761 9
29 832 745 768 2
841 442 0
12 7

1. 000 000 029 832 745 780 9
423 079 750 545 203 9

Cos. $1\frac{2}{3}^{\circ}$ = 0. 999 576 950 082 200 577 0

1. 000 000 000 000 000 000 000 0
4 230 797 497 037 619 4
2 983 274 576 8
841 4

Cos. 10′ = 0. 999 995 769 205 486 236 116 0

1. 000 000 000 000 000 000 000 000 0
42 307 974 970 376 194 4
298 327 457 7
8

Cos. 1′ = 0. 999 999 957 692 025 327 951 262 5

1. 000 000 000 000 000 000 000 000 000 0
423 079 749 703 761 943 5
29 832 745 8

C. 6″ = 0. 999 999 999 576 920 250 326 070 802 3

0. 785

0.785 398 163 397 448 309 615 660 845 (2′)
157 079 632 679 489 661 923 132 169

[0. 308 425 137 534 042 456 84. (2′)²
12 337 005 501 361 698 273

80 745 512 188 280 781 (2′)³
645 964 097 506 246 2

15 854 344 243 815 50 (2′)⁴
25 366 950 790 104

2 490 399 570 192 72. (2′)⁵
796 926 262 462

325 991 886 927 39. (2′)⁶
20 863 480 763

36 576 204 182 18. (2′)⁷
468 175 413

28 726 883 588 72. (2′)⁸
9 192 603

313 361 689 04. (2′)⁹
160 441

24 611 369 50. (2′)¹⁰
2 520

1 757 247 67. (2′)¹¹
36

Hierdurch findet man die Sinus und Cosinus von 9°, von 54′, u. s. w.

S. 9° = 0. 156 434 465 040 230 869 1
S. 54′ = 0. 015 707 317 311 820 675 753 424
S. 5′ 24″ = 0. 001 570 795 680 830 878 805 606 7

Cos. 9° = 0.987 688 340 595 137 726 1
— 54′ = 0.999 876 632 481 660 598 638 9
— 5′ 24′ = 0.999 998 766 299 703 533 317 210 2

Auf solche Art kann man noch eine gute Anzahl andere Sinus und Cosinus aus diesen berechnen.

8. Zu S. 529.

Versuch von den Perioden der Decimalzahlen. *)

Period.		
1	9	3^2
	11	. .
2	99	(9. 11)
	101	. . .
3	999	(9). 3. 37
	1001	(11). 7. 13
4	⸗ 999	(99. 101)
	⸗ 001	73. 137
5	⸗ 999	(9). 41. 271
	⸗ 001	(11). 9091
6	⸗ 999	(999. 1001)
	⸗ 001	(101). 9901
7	⸗ 999	(9). 239. 4649
	⸗ 001	(11). 909091
8	⸗ 999	(9999. 10001)
	⸗ 001	(17). 5882353
9	⸗ 999	(999). 3. 333667
	⸗ 001	(1001). 19. 52579
10	⸗ 999	(99999. 100 001)
	⸗ 001	(101). 3541. 27961
11	⸗ 999	(9).
	⸗ 001	(11^2). 23. 4093. 8779
12	⸗ 999	(999 999. 1000 001)
	⸗ 001	(10001).
13	⸗ 999	(9). 53. 79.
	⸗ 001	(11). 859
14	⸗ 999	(9 999 999. 10000001)
	⸗ 001	(101). 29. 281.
15	⸗ 999	(99999). (3. 37). 31
	⸗ 001	(100001). (7. 13). 211. 241. 2161
16	⸗ 999	(99 999 999. 100 000 001)
	⸗ 001	353. 449. 641.

u. s. f.

In dieser Zergliederung der Zahlen $10^n - 1$ und $10^n + 1$, habe ich angemerkt: daß Eins der

*) Hiervon handelt auch der nächstfolgende Zusatz S, von Herrn Oberreit.

Periodus ist von $\frac{1}{9} = 0.111\,11\overset{6}{\smile}\!1$ ꝛc.; zwey der Periodus von $\frac{1}{99} = 0.010\,10\overset{6}{\smile}\!1$ ꝛc. drey der Periodus von $\frac{1}{999} = 0.001\,00\overset{6}{\smile}\!1$ ꝛc. u. s. f.

Weiter, daß Eins der halbe Periodus ist von $\frac{1}{11} = 0.090\,90\overset{6}{\smile}\!9$ ꝛc. Zwey der halbe Periodus von $\frac{1}{101} = 0.009\,90\overset{6}{\smile}\!0$ ꝛc. Drey der halbe Periodus von $\frac{1}{1001} = 0.000\,99\overset{6}{\smile}\!9$ ꝛc. u. s. f.

Von diesen letztern Perioden ist die erste Hälfte der Ziffern, das Complement zu 9 von der andern Hälfte; daher wenn man die Erste hat, so ist die andere auch bekannt.

Der Periodus ist einerley mit dem Exponenten von 10. Z. E. der Periodus 3 mit $10^3 \mp 1$.

Was von 9, 99, 999, ꝛc. und 11, 101, 1001, ꝛc. in Ansehung der Perioden gilt, das kömmt auch derselben Factoren zu. Nemlich: wie Eins der Periodus von 9, also auch von 3, als derselben Quadratwurzel.

Wie 3 der Periodus von 999 ist, also auch von 17, 37, 111, 333, als derselben Factoren.

Wie

Wie 3 der halbe Periodus von 1001 ist, also auch von derselben Factoren 7, 13, 77, 91 und 143.

In Ansehung der Dignitäten habe ich angemerkt, daß

Eins ist der Periodus von 3 und 3^2; drey ist er von 3^3; neun von 3^4, ꝛc.

Eins ist der halbe Periodus von 11; 11 von 11^2; 121 von 11^3, ꝛc. Kurz: der ganze oder halbe Periodus der Dignität n, einer Primzahl p, deren Periodus d, ist dp^{n-1}, ausgenommen von 3, dieser ist dp^{n-2}.

Eins ist der halbe Periodus von 9.11; zwey von 99.101; drey von 999.1001, ꝛc. desgleichen von 27.7, 27.11, 27.13, 7.37, 11.37, 13.37, ꝛc. Demnach ist auf den Unterschied der ganzen und halben Perioden nicht anders zu sehen, als nur in der Zusammensetzung; wenn ein oder mehrere halbe Perioden vorkommen, so ist der letzte Periodus doppelt zu nehmen.

Alle Perioden kommen in ihren Multipeln wieder vor, z. E. der Periodus Eins in allen folgenden; zwey in 4, 6, 8, 10 ꝛc. drey in 6, 9, 12, 15, ꝛc. vier in 8, 12, 16, 20, ꝛc. fünf in 10, 15, 20, 25, ꝛc. u. s. f.

Eilf und 101 sind die einzigen Primzahlen unter $10^{32}+1$, die eigene Perioden haben. Wenn $30^{32}+1$ eine Primzahl wäre, würde sie die dritte

in der Ordnung seyn. Die andern Zahlen zwischen 101 und $10^{32}+1$, der Perioden 2 bis 32, sind Componirtezahlen, deren Primfactoren den Periodum mit einander gemein haben.

Zum Exempel.

19, 13, 11, 7, ꝛc. den Periodum 9 von $10^{9}+1$,
11, 37, 41, 271, ꝛc. den Period. 15 von $10^{15}-1$,
u. s. f.

Der Periodus einer Componirtenzahl ist aus den Perioden seiner Primfactoren zusammengesetzt, in so ferne dieselben verschiedene Perioden, auch keinen Periodum gemeinschaftlich haben.

Ferner habe ich insonderheit angemerkt, daß der ganze oder halbe Periodus einer Primzahl p, entweder $\frac{p-1}{2}$ oder nur ein Factor davon ist.

Von den 166 Primzahlen unter 1000, die Perioden machen, den 2 und 5 sind davon ausgeschlossen, sind 97 deren ganzer oder halber Periodus $\frac{p-1}{2}$ ist, und von den übrigen 69 ist er nur ein Factor davon; dieses sind die folgenden:

	Per.		P.		P.		P.		P.		P.		P.
11	1	127	21	271	5	401	100	601	150	691	115	829	138
13	3	137	3	277	69	409	102	607	101	733	61	853	213
37	3	139	23	281	14	421	70	613	51	739	123	859	13
41	5	157	39	293	73	449	16	617	44	751	125	877	219
53	13	173	43	317	79	457	76	641	16	757	27	881	220
73	4	197	49	331	55	463	77	643	107	761	190	907	151
79	13	211	15	349	58	521	26	653	163	769	96	929	232
89	22	239	7	353	16	547	91	661	110	773	193	967	161
101	3	241	15	373	93	557	139	673	112	797	199	997	83
103	17	251	25	397	99	569	142	677	169	809	101	1009	126

Nun sind die andern 97 auch bekannt.

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{5\cdot7}+\frac{2}{9\cdot11}+\frac{2}{11\cdot13}\text{ ꝛc.}=0{,}785\,\overbrace{398}^{6}\,163\,\overbrace{397}^{12}\text{ ꝛc.}$$

Die

Die Perioden zu bestimmen, wenn die Brüche dieser unendlichen Reihe nach und nach addiret werden.

	Perioden der Nenner.	
$\frac{2}{3}$	1	1 Period.
$\frac{2}{5\cdot 7}$	*. 3	2. 3 = 6
$\frac{2}{9\cdot 11}$	1. 1	 6
$\frac{2}{13\cdot 15}$	ß. 1	 6
$\frac{2}{17\cdot 19}$	8. 9	2. ß. 8. 9 = 144
$\frac{2}{21\cdot 23}$	ß. 11	2. 8. 9. 11 = 1584
$\frac{2}{25\cdot 27}$	*. 3	2. 8. 9. 11. 3 = 4752
$\frac{2}{29\cdot 31}$	14. 15	2. 8. 9. 11. ß. 14. 15 = 332 640
$\frac{2}{33\cdot 35}$	1. ß	. . . . 332 640
$\frac{2}{37\cdot 39}$	ß. ß	. . . . 332 640
$\frac{2}{41\cdot 43}$	ß. 21	2. 8. 9. 11. 14. 15. 21 = 6985440
$\frac{2}{45\cdot 47}$	1. 23	2. 8. 9. 11. 14. 15. 21. 23. = 160 665 120
$\frac{2}{49\cdot 51}$	(ß. 7). 8	2. 8. 9. 11. 14. 15. 21. 23. 7 = 1 124 655 840

u. s. w.

Auf

Auf die Zähler dieser Brüche wird nicht gesehen.

Der halbe Periodus 3 von 7 muß doppelt genommen werden.

13 hat denselben mit 7 gemein.

Desgleichen auch 19, als dessen Multipel. Als auch 35 und 39.

37 hat den Periodum mit 27 gemein.

Der Periodus 5 ist schon in 15, dem von 31 begriffen.

In dem Periodo $3 \cdot 7 = 21$ von $7^2 = 49$, fällt der erste Factor 3 weg.

Der Periodus von 51 ist schon in dem von 3. 17 da gewesen.

Aus diesem erhellet nun, daß diese unendliche Reihe in Decimalzahlen aufgelöset, keine Perioden geben könne, und folglich auch durch keinen Rationalbruch ausgedruckt werden mag.

Zum Ueberfluße folgt hier noch eine kleine Probe.

$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$=$ 0. 666 [6] 666 2c.
$\frac{2}{5 \cdot 7}$	$\frac{76}{3 \cdot 5 \cdot 7}$	$=$ 0. 723 [6] 809 523 [12] 809 2c.
$\frac{2}{9 \cdot 11}$	$\frac{2578}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}$	$=$ 0. 744 [6] 011 544 [12] 011 2c.
$\frac{2}{13 \cdot 15}$	$\frac{33976}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}$	$=$ 0. 754 [6] 267 954 [12] 267 2c.
$\frac{2}{17 \cdot 19}$	$\frac{11\,064\,338}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19}$	$=$ 0. 760 [6] 459 904 [12] 732 350 [18] 552 783 989 [24] 316 497 [30] 056 435 [36] 136 930 [42] 492 967 [48] 644 670 [54] 431 048 [60] 140 026 [66] 468 199 [72] 842 812 [78] 845 908 [84] 821 141 [90] 019 283 [96] 434 144 [102] 115 258 [108] 666 342 [114] 257 673 [120] 527 023 [126] 372 224 [132] 610 614 [138] 703 493 [144] 960 [150] 459 904 2c.
2c.		

Der Periodus fängt bey dem zweyten Bruch, wegen des Factors 5, um eine Decimalstelle später an.

*

Es giebt unendliche Reihen deren Summa keine Perioden hat, und gleichwohl rational ist.

$$\text{Z. E. } 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{4 \cdot 9} \text{ u. s. f.}$$

die Glieder nach und nach addirt $= \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \frac{6}{8}, \frac{7}{9}$, 2c.

Die

Die Zähler sind die ordentlichen Zahlen, der Nenner aber jedesmahl 2 mehr als sein Zähler. Man nehme $\frac{6\,999\,998}{7\,000\,000} = 0.\,99999\overset{6}{9}\,71428\overset{12}{5}\,714$ ꝛc.

Wenn $\frac{6999}{7000}$ ꝛc. unendlich groß, so fängt der Periodus unendlich spät an; denn 2, 5 oder 10 machen, daß der Periodus jedesmahl eine Decimalstelle später anfängt: also hat diese Reihe keinen Periodus. Doch es ist alsdann $0.99999\overset{6}{9}$ ꝛc. $= 1$.

Anders: $\frac{999\,997}{999\,999} = 0.\,99999\overset{6}{7}\,99999\overset{12}{7}$ ꝛc. Wenn dieser Bruch unendlich groß ist, so ist solches auch der erste Periodus, und das ist so viel als kein Periodus. Es ist aber alsdann $0.99999\overset{6}{9}$ ꝛc. gleichfalls $= 1$.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 11} + \text{ꝛc.}$$

Diese Reihe nach und nach addirt giebt $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{11}$, u. s. f. Die Zähler sind wieder die natürlichen Zahlen, eines jeden Nenner aber der doppelte Zähler $+1$. Nimmt man $\frac{499\,999}{999\,999} = 0.\,49999\overset{6}{9}\,49999\overset{12}{9}$ ꝛc., so sieht man wohl, im

Fall

Fall $\frac{499}{999}$ ꝛc. unendlich, alsdann auch solches der erste Periodus ist; und so ist gleichfalls $0.499999\overset{6}{\smile}999$ ꝛc. $= \frac{1}{2}$.

Es ist eine Eigenschaft geometrischer Progressionen, die unendlich absteigen, daß die Summa der Glieder in Decimalzahlen, es sey daß die Glieder selbst Perioden machen oder nicht, daß ihre Summa sage ich, allezeit Perioden machen, oder doch machen können. Z. E.

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} \text{ ꝛc.}; \quad \frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} \text{ ꝛc.}; \quad \frac{1}{11} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{13_3} \text{ ꝛc.}$$

9. Zu S. 530.

Zu beweisen daß die unendliche Reihe $\frac{2}{3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11}$ ꝛc. $= 0.785\,39\overset{6}{\smile}8$ ꝛc. d. i. deren Summa in ihren Dignitäten keine Perioden gebe oder mache, oder welches einerley, daß dieselbe durch keinen Irrationalbruch genau ausgedrückt werden könne.

Der ganze oder halbe Periodus einer Primzahl p ist $\frac{p-1}{2}$ oder nur ein Factor davon. Ausge-

nommen die Primzahl Eilf, von allen andern. Hingegen wenn $\frac{p-1}{2}$ eine Primzahl ist, so ist solche auch der Periodus von der Primzahl p.

Der ganze oder halbe Periodus der Dignität n, einer Primzahl p, deren Periodus d ist, ist dp^{n-1}, ausgenommen von 3, denn dieser ist dp^{n-2}.

Alle Primzahlen sammt derselben Dignitäten sind Rationalzahlen, und haben ihre bestimmten Perioden. Hingegen die Wurzel einer Dignität aus einer Primzahl ist irrational, und kann keine Perioden haben oder machen.

Eine Irrationalzahl kann und muß in ihren Dignitäten, wenn sie rational wird, Perioden bekommen. Z. E.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{p}}\right)^n = \frac{1}{p}, \text{ und } \left(\frac{1}{\sqrt[n]{p}}\right)^{mn} = \frac{1}{p^m}.$$

Der Periodus von $\frac{2}{3} + \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{76}{3 \cdot 5 \cdot 7}$ ist 6.

Vom Quadrat desselben ist er $1 \cdot 7 \cdot 6 = 42$

Vom Cubo = = = = $3 \cdot 7^2 \cdot 6 = 882$

Von der 4ten Dignität = $3^2 \cdot 7^3 \cdot 6 = 18522$.

u. s. f.

Der Periodus von

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{9 \cdot 11} = \frac{2578}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} \text{ ist } 6.$$

Vom

Vom Quadr. desselb. ist er 7. 9. 11. 6 = 4158
Vom Cubo - - - $7^2 . 9^2 . 11^2 . 6 = 2881494$
u. s. w.

Hieraus folgt: daß der Periodus von der ganzen Summa dieser unendlichen Reihe, welcher an und für sich selbst schon unendlich groß ist, in allen seinen Dignitäten noch unendlich größer wird, und daraus ist man überzeugt, daß dieselbe Summa auch durch keinen Irrationalbruch ausgedruckt werden kann.

10. Zu S. 533.

Hier folgen zum Beschlusse dieser Wolframschen Beylagen, die drey kleinen Stücke, welche in meiner Note a. a. O. versprochen worden.

a. Von den Primzahlen.

10	1230	9	1118	138	12842	1000000	78461
20	2263	18	2065	150	13849	500000	41541
30	3246	27	2962	162	14853	333333	28668
40	4204	36	3825	174	15834	250000	22044
50	5134	45	4676	186	16837	200000	17985
60	6058	54	5501	198	17822	166666	15226
70	6936	63	6321	210	18808	142857	13253
80	7838	72	7129	222	19777	125000	11735
90	8714	81	7926	234	20747	111111	10545
100	9593	90	8714	246	21714	100000	9593
110	10454	99	9506	258	22676	90909	8795
120	11302	108	10275	270	23643	83333	8135
130	12160	117	11046	282	24605	76923	7563
140	13011	126	11819	294	25532	71428	7075
150	13849			300	25998	66666	6646
						62500	6276
						58823	5949
						55555	5638
						52631	5375
						50000	5134

Bis 10000 sind 1230 Primzahlē Eins mitgezählet; bis 20000, 2263 u.s.w. bis 9000, 1118 — 18000, 2065.

Das Uebrige versteht sich nun von selbst.

Die ersten drey Colonnen habe ich berechnet und abgezählet, wie ich meine Tafel bis 300000 geprüft und verbessert habe, theils auch nöthig gehabt, die Primzahlen bis auf eine Million zu bestimmen. Die 4te Colonne aber habe ich nöthig gehabt, die componirten Zahlen unter einer Million, die man aus den Primzahlen unter 10000 zusammensetzen kann, zu bestimmen.

b. Von 27 absol. Zahlen, die weitere Ausführung der hyperbol. Logarithmen, theils von der 46sten, theils von der 64sten Stelle an.

	48		54			60		66	72
5399	024	964	515	447	553	108	17		
5471	601	306	438	639	889	290	06		
5563	579	985	777	860	806	660	79		
5827	5[illegible]9	540	034	330	368	174	1		
6263	969	366	941	902	120	494	6		
7331	411	875	577	295	832	962	1		
7487	898	631	073	108	171	499	6		
7499	455	362	786	762	2[illegible]1	152			
7681	156	322	063	712	967	421	65		
8191	448	675	200	740					
9091	555	653	054	163	511	827	814	844	75
9283	079	994	614	263	037	313	1		
9421	276	030	998	717	125	303	9		
9437	189	985	931	874	618	193	935		
9973	889	078	171	464	028	379	751	545	343

		66		72		78		84
193	316	677	409	518	192	008	205	7875
199	944	099	205	380	915	900	125	9[illegible]40
251	434	441	407	278	205	735	089	4626
503	256	448	154	676	521	064	125	4204
521	749	787	766	241	167	838	134	9327
643	696	988	104	070	500	334	932	8271
997	012	848	835	369	148	996	82[illegible]	6785
1999	646	821	763	812	104	271	187	9138
2083	337	133	775	488	094	743	895	1879
2699	269	139	210	631	327	740	566	5901
4001	209	592	720	417	936	239	101	2893
4111	630	319	560	196	408	562	189	7[illegible]13

c. Zwey

c. Zwey Tafeln, die Logarithmen zu verwandeln (weiter ausgeführet von der 46sten bis 66sten Stelle).

		48		54			60	66
1	— — — — —	628	772	976	033	327	900	967''
2	— — — — —	257	545	952	066	655	801	935
3	— — — — —	886	318	928	099	983	702	902
4	— — — — —	515	091	904	133	311	603	870
5	— — — — —	143	864	880	166	639	504	837
6	— — — — —	772	637	856	199	967	405	805
7	— — — — —	401	410	832	233	295	306	773
8	— — — — —	030	183	808	266	623	207	740
9	— — — — —	658	956	784	299	951	108	708

		48		54			60	66
1	— — — — —	803	666	566	114	453	783	165''
2	— — — — —	607	333	132	228	907	566	331
3	— — — — —	410	999	698	343	361	349	497
4	— — — — —	214	666	264	457	815	132	663
5	— — — — —	018	332	830	572	268	915	829
6	— — — — —	821	999	396	686	722	698	995
7	— — — — —	625	665	962	801	176	482	161
8	— — — — —	429	332	528	915	630	265	326
9	— — — — —	232	999	095	030	084	048	492

II.

Zu den oben gelieferten Nachträgen aus Herrn Wolfram's eigenen Briefen an Lambert gehöret noch folgendes Stück eines Briefes desselben an den Herrn Geheimen Kriegesrath Davisson in Danzig *), welches er mir bald nach Empfang

*) Der Herr Geheime Rath Davisson, dessen Briefwechsel mit Lambert auch im vierten Bande stehet, privatisiret jetzo in Manheim.

des Briefes ohne Rücksicht auf Lamberts hinterlassene Schriften mittheilte; ich erinnerte mich dessen nicht mehr, da ich Wolframs Briefe drucken ließ; erst kürzlich ist es mir von ungefehr wieder unter die Hände gekommen.

„Auszug eines Schreibens des Herrn Capitain Lieutenant Wolfram, an mich D. G. Davisson, datirt Helvoetsluys, den 2ten März 1781."

„Von meinen Nebengeschäften seit 1778 habe ich zu melden, daß ich die Logarithmen, welche ich von 1772 bis 1776 berechnet, und die Rechnungen selbst nur bis auf 27 Decimalstellen niedergeschrieben hatte, diese Rechnungen habe ich bis auf 51 Decimalstellen ergänzet, so wie ich dieselben von 1776 bis 1778 aufgeschrieben gehabt. Hiemit wurde ich im Julio 1780 schon fertig, und habe dabey folgende 5 (4) Schreib- und Rechnungsfehler in meinen gedruckten Logarithmen verbessert, nemlich:"

Log.	wie viel ste Ziffer.	steht	muß seyn
1900	33	2	1
4357	47	6	8
7247	32	4	5
8963	35	2	3

„Weiter habe ich auch die Logarithmen von A. Sharp in Sherwin's Mathem. Tables befindlich, die für die ersten 100 Zahlen, und für alle Primzahlen bis 1100, bis auf 61 Decimalstellen

stellen berechnet sind, diese Logarithmen habe ich nachgerechnet und ausser wenigen in den letzten Ziffern, sie alle richtig gefunden, womit ich im October 1780 fertig wurde.

„Ich war schon 1776 auf den Einfall gekommen, durch die Perioden der Decimalzahlen zu beweisen, daß die Quadratur des Zirkels durch keinen endlichen Werth, weder in Rational- noch Irrationalzahlen ausgedruckt werden könne. Ich eröfnete meine Gedanken darüber dem seel. Herrn Lambert, welcher mir vom 8. März 1777 schrieb: „Es wird wohl auch — lassen.“ *)

„Bey weiterm Nachsinnen wurde ich gewahr, daß ich mich im Grunde zwar nicht geirret, gleichwohl aber meine Gedanken dort noch allzu unreif gewesen waren. Ich sann also nach, und habe endlich 1779 einen Versuch von den Perioden der Decimalzahlen, und derselben Anwendung auf die unendlichen Reihen von der Hyperbel und des Cirkels aufgesetzt, worin ich meyne dargethan zu haben, daß diese unendlichen Reihen durch keinen endlichen Werth, weder in Rational- noch Irrationalzahlen gegeben werden, und folglich auch nicht die hyperbolischen Logarithmen und die Ellipsen, welche von der Hyperbel und dem Cirkel abhängen.“

„Von diesem Aufsatz oder Versuch habe ich eine Abschrift den 28. April 1779 aus Nimwegen an

 den

*) S. Lamberts Briefwechsel, IV. B. 534. S.

den Herrn Professor J. C. Schulze in Berlin, geschickt. — — Ich habe aber seit der Zeit keine Nachricht davon erhalten — — ." *)

S.

Diesem allen vom grossen Calculator Wolfram schliesset sich noch füglich der nachstehende Aufsatz an, welcher den eben so geschickten und unermüdeten Herrn Ober-Finanz-Buchhalter Oberreit zum Verfasser hat.

In den leztern Briefen des Lambert-Wolframschen Briefwechsels, vornemlich in Lamberts Briefe vom 30. Nov. 1776, kommt etwas Weniges von den sogenannten periodischen Decimal Reihen vor. Diese merkwürdige Eigenschaft unsers Zahlengebäudes scheint weit weniger bekannt zu seyn, als sie es zu seyn verdient. Da nun in den Mémoires, die Herr Professor Bernoulli bey der Königlichen Akademie zu Berlin im Jahr 1771 hierüber vorgelesen, (und die in obgedachtem Briefwechsel, in der Note, Seite 534 angeführt sind,) mehrere sehr nützliche Bemerkungen enthalten sind, die auch Lambert selbst über diese Materie gemacht hatte: so wird's wohl nicht am unrech=

*) Eben der Nachfrage wegen, wurde mir dieser Auszug zugeschickt: Herr Professor (und Ober-Baurath) Schulze versicherte, die Abhandlung erhalten zu haben, und daß er bey Gelegenheit Gebrauch davon machen würde.

unrechten Orte angebracht seyn, wenn ich das Wichtigste davon in Kürze hier zusammenfasse.

1. Wenn ein Bruch $\frac{1}{a}$ in Decimaltheilen ausgedrückt wird: so hat, wenn a nicht von der Form $2^m . 5^n$ ist, dieser Decimalbruch kein Ende; sondern seine Theile kommen, nach einer gewissen Anzahl von Ziffern, in eben der Ordnung unaufhörlich wieder zum Vorschein. So z. E. ist $\frac{1}{41} = 0,02439\ 02439\ 02439$ &c.

2. Die wiederkehrenden Decimalzahlen von $\frac{1}{a}$ können zwar weniger, aber doch nicht mehr als aufs höchste $a-1$ Ziffern haben.

3. Die Zahl a, wodurch eine gegebene Zahlen-Periode hervorgebracht wird, läßt sich aus der letztern finden, wenn man unter die Ziffern der Periode eine eben so große Anzahl der Zahl 9 bruchweise setzt, und diesen Bruch verkleinert. Z. E. $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$; $\frac{027}{999} = \frac{1}{37}$. Daher ist die Summe der Ziffern einer Periode, folglich auch die Periode selbst, allemal in 9 theilbar; wenn a eine Primzahl, und nicht < 7 ist.

4. Wenn a eine Primzahl, b eine jede andre durch a nicht theilbare Zahl ist: so wird $\frac{b^{a-1}-1}{a}$

 allemal

allemal eine ganze Zahl seyn. Folglich wird auch $\frac{10^{a-1}-1}{a}$ eine ganze Zahl seyn, wenn a weder $=2$, noch $=5$ ist.

5. Wenn a eine jede andre Primzahl vorstellt, und $\frac{10^m-1}{a}$ ist eine ganze Zahl: so muß m entweder ein Vielfaches von $a-1$, oder $=a-1$, oder aber ein Theiler von $a-1$ seyn. Z. E. $\frac{10^{12}-1}{7}$, $\frac{10^{12}-1}{13}$, $\frac{10^{12}-1}{37}$, sind ganze Zahlen; und 12 ist ein Vielfaches von $7-1$, ein Theiler von $37-1$, und auch $=13-1$.

6. Wenn 1 durch irgend eine ungerade Zahl a getheilt wird, und es findet sich nach $\frac{1}{2}.(a-1)$ Divisionen der Rest $a-1$; oder, welches, wie wir sehen werden, Einerley ist, wenn die ganze Periode $a-1$ wiederkehrende Ziffern hat: so ist a nothwendig eine Primzahl.

7. Wenn $\frac{1}{a}$ eine Periode von 2m Ziffern giebt, so daß $\frac{10^{2m}-1}{a}$ eine ganze Zahl wird: so muß auch $\frac{10^m+1}{a}$ eine ganze Zahl seyn; weil

$\frac{10^{2m}-1}{a}$

$\frac{10^{2m}-1}{a} = \frac{(10^m-1).(10^m+1)}{a}$ ist. Dabey mag nun $2m$ entweder $<$ oder $= a - 1$ seyn.

Dieser Satz giebt einen Rechnungs-Vortheil an die Hand, wodurch die Theilung, wenn man sie wirklich vornimmt, in solchen Fällen auf die Hälfte reducirt wird. Es sey nämlich von $\frac{10^m+1}{a}$ der Quotient $= q$: so wird von $\frac{10^{2m}-1}{a}$ der Quotient $(10^m-1).q = 10^m q - q$ seyn; und man braucht also nur q von $10^m q$ abzuziehen.

Es ist z. E. $\frac{10^4+1}{73} = 137$. Folglich hat man $(10^4-1).137 = 1370000 - 137 = 1369863$. Demnach $\frac{1}{73} = 0,01369863$ 01369863 &c. — Oder, welches auf Eins hinausläuft: Wenn man $\frac{1}{73} = 0,0136 + \frac{73-1}{73.10^4}$ gefunden hat, und also auf den Rest -1 gekommen ist: so nimmt man zu diesen gefundenen vier Ziffern nur noch ihr Complement zu 9, nämlich 9863; und so hat man die ganze Periode $\frac{1}{73} = 0,01369863 + \frac{1}{73.10^8}$.

Eine

Eine andre Divisions-Abkürzung bietet sich dar, wenn man im Dividiren auf einen Rest verfällt, der nur eine einzelne Ziffer ausmacht, oder auch um einige Einheiten kleiner, als der Divisor selbst ist. Z. E. $\frac{1}{19}$ giebt nach der 4ten Division

$0{,}0526 + \frac{6}{19.10^4}$. Demnach hat man

$$\frac{10^4 - 6}{19.10^4} = 0{,}0526;$$

folglich auch

$$\frac{6.10^4 - 6^2}{19.10^8} = 0{,}\ldots\ldots{,}3156;$$

Man multiplicirt demnach den ersten Quotienten, und jedes folgende Product, mit dem Reste 6, und ordnet die Producte, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{19} = 0{,}0526 \\
\qquad\qquad\quad 3156 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 18936 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 113616 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 681696 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 409 + \frac{5}{19.10^{20}} \\
\hline
\frac{1}{19} = 0{,}052631578|947368421{,}05 \ \&c.
\end{array}$$

Nach der 18ten Ziffer kömmt also die Periode wieder zum Vorschein; und schon nach der 9ten

($=\frac{1}{2}$

($= \frac{1}{2}(19-1)$ten) Ziffer hätte man sehen können, daß von da an der erstern Ziffern ihre Complemente zu 9 auftreten, und daß man also die Multiplicationen noch um die Hälfte hätte ersparen können.

Ein ander Beyspiel: $\frac{1}{179}$ giebt nach der 15ten Division $0,005586592178771 - \frac{9}{179 \cdot 10^{15}}$.

Man erhält demnach

$\frac{1}{179}$	$0,005586\ 592178\ 771 : 10^{15}$	Oder $0,005586\ 592178\ 770$
	$-\ 050279\ 329608\ 939 : 10^{30}$	$949720\ 670391\ 061$
	$+\ 452513\ 966480\ 451 : 10^{45}$	$452513\ 966480\ 446$
	$-4,072625\ 698324\ 059 : 10^{60}$	$927374\ 301675\ 977$
	$+36,653631\ 284916\ 531 : 10^{75}$	$653631\ 284916\ 201$
	$-329,882681\ 564248\ 779 : 10^{90}$	$117318\ 435754\ 18,9944$
	$+2968,944$ &c.	&c.

Hier kommen nach der $\frac{1}{2}(179-1)$ oder 89ten Ziffer die Complemente der ersten Ziffern zu 9 zum Vorschein; demnach ist das weitere Multipliciren Ueberfluß, und die Periode hat $2 \cdot 89 = 178$ Ziffern.

Ist's aber nicht um die Periode selbst, sondern bloß darum zu thun, daß man die Anzahl der periodischen Ziffern wissen will: so wird die Rechnung oft noch kürzer. Z. E. im vorigen Beyspiel war nach der 15ten Division der Rest $= -9$.

Also

Also nach der 30ten wird er seyn $(-9)^2 = +81$.

nach der 45ten = = = $(-9)^3 = -729 = -4 \cdot 179 - 13$.

nach der 60ten = = = $-9 \cdot -13 = +117$.

nach der 75ten = = = $-9 \cdot +117 = -1053 = -6 \cdot 179 + 21$.

nach der 90ten = = = $-9 \cdot 21 = -189 = -179 - 10$.

Es ist demnach $\frac{9^6 + 10}{179}$ eine ganze Zahl; und diese mit $9^6 - 10$ multiplicirt, giebt

$$\frac{9^{12} - 10^2}{179}, \text{ wieder eine ganze Zahl.}$$

Folglich wird nach $12 \cdot 15 - 2 = 178$ Divisionen der Rest wieder, wie Anfangs, $= +1$ seyn; und die Periode hat also, wie gesagt, 178 Ziffern. — Es läßt sich dieses auch daraus schließen, daß, wenn nach 90 Divisionen der Rest $= -10$ ist, nach $90 - 1 = 89$ Divisionen der Rest $= -1$ seyn, und daher die Periode $2 \cdot 89$ Ziffern haben muß.

Bey diesem Verfahren kömmt es eigentlich darauf an, daß die Anzahl der Divisionen $= n$, die einen bequemen Ueberrest giebt, zugleich auch ein Factor sey von $a - 1$, oder auch von $a + 1$; und alsdann werden, wie gezeigt worden, die folgenden Ueberreste sprungsweise gesucht, bis man nach m Wiederholungen auf einen kömmt, der 1, 10, 100, ꝛc. oder $a - 1$, $a - 10$, $a - 100$, ꝛc. sey. Ist nun 10^r oder $a - 10^r$ der Rest: so zeigt $mn - r$ im ersten Fall die Anzahl der Ziffern der ganzen, im andern

andern die der halben Periode an. Doch ist hiebey zu merken, daß man den Versuch mit allen Werthen, die n, als Factor von $a-1$ oder $a+1$ haben kann, machen muß; weil man sonst leicht irgend einen Rest von $10^0 = 1$, 10^r, $a-1$, $a-10^r$, überspringen, und glauben kann, die Periode sey größer als sie wirklich ist. So z. E. bey $\frac{1}{a} = \frac{1}{31}$ ist 2 ein Factor von $31+1$, so wie von $31-1$; 3 und 5 aber sind Factoren von $31-1$. Nun ist der 2te Ueberrest $=7$, der 3te $=8$, der 5te $=-6$; und man erhält demnach

$$\frac{7^8 - 10^1}{31},\quad \frac{8^5 - 1}{31} \text{ und } \frac{(-6)^3 - 1}{31},$$

welches ganze Zahlen sind. Daher hat die Periode $8.2-1 = 3.5-0$ Ziffern. Nehme ich hingegen $n = 6$, welches auch ein Factor von $31-1$ ist: so habe ich nach der 6ten Division 2 zum Ueberrest; das giebt nach der 2. 6ten Division 2^2; nach der 3. 6ten, $2^3 = 8$. Und damit ist, von der 12ten bis zur 18ten Division, die 15te, die 1 zum Rest läßt, übersprungen.

Wenn übrigens $10^m - 1$ durch die Primzahl a theilbar ist: so ist nicht nur $10^{2m} - 1$, sondern auch $10^{3m} - 1$, und überhaupt $10^{mn} - 1$, ebenfalls durch a theilbar.

Aus dem bisher gesagten ist klar, daß die periodischen Decimal-Reihen und die Theiler der Summe der geometrischen Progression

1+

$1+10^1+10^2+10^3+\dots\ 10^{m-1}=(10^m-1)$ $:(10-1)$ in so genauer Verbindung mit einander stehen, daß man aus jenen Perioden diese Theiler, und wieder aus diesen Theilern die Größe der Perioden finden kann; und daß es sich daher der Mühe lohnt, die Eulerschen Lehrsätze, um die Theiler von $10^m \mp 1$ zu finden, die Herr Bernoulli anführt, ebenfalls noch kürzlich hier zu wiederholen. *)

1. Wenn p eine Primzahl ist: so kann a^p-b^p (oder 10^p-1), ausser $a-b$ (oder $10-1$), keine andern Primzahlen zu Theilern haben, als solche, die von der Form $2pm+1$ sind. Z. E. 10^7-1 ist theilbar durch $14m+1$, oder, da hier $m=17$, durch $14.17+1=239$.

2. Die Summe zwoer Potenzen $a^{2^m}+b^{2^m}$ hat keine andern Prim-Theiler, als solche von der Form $2^{m+1}n+1$. So z. E. ist $10^{2^4}+1=10^{16}+1$ in $2^{4+1}n+1=32n+1$, oder, da hier $n=11$, 14, 20, ꝛc. ist, in 353, 449, 641, ꝛc. theilbar.

3. Zahlen von der Form $a^{2^n p}+b^{2^n p}$ lassen sich theilen durch $a^{2^n}+b^{2^n}$. Z. E. $10^{2^2 3}+1$ $=10^{12}$

*) Daher hat Herr Oberreit auch die am Ende dieses Aufsatzes stehenden 2 Tabellen beygefüget, von denen die erste eine Erweiterung der meinigen in den Mémoires &c. 1771. p. 333. enthält.

$= 10^{12} + 1$ durch $10^{2^2} + 1 = 10^4 + 1$. — Wenn aber eine solche Zahl, z. E. $10^{2^n p} + 1$ durch eine Primzahl theilbar ist: so muß auch $10^{2^n 2p} - 1$ dadurch theilbar seyn. Nun hat $10^{2^n 2p} - 1 = (10^{2^n})^{2p} - 1 = (10^{2^{n+1}})^p - 1$ keine anderen Primzahlen zu Theilern, als die von der Form $2pm + 1$; wobey p eine ungerade Primzahl ist. Folglich sind die Zahlen $10^{2^n p} + 1$ ebenfalls zugleich durch Primzahlen von $2pm + 1$ theilbar; oder die Theiler $10^{2^n} + 1$ müssen zugleich $= 2pm + 1$ seyn; wodurch dann die Anzahl der Theiler, womit man Versuche zu machen hat, ansehnlich begränzt und vermindert wird.

4. Wenn ferner p den Theiler q hat: so hat die Formel $a^{2^n p} + b^{2^n p}$ auch $a^{2^n q} + b^{2^n q}$ zum Theiler.

5. Wenn r ein Theiler der ungeraden Zahl $2n + 1$ ist: so hat die Formel $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ allemal, ausser dem Theiler $a + b$, auch den Theiler $a^r + b^r$. Z. E. $10^{3 \cdot 5} + 1$ ist theilbar durch $10^5 + 1$ und $10^3 + 1$.

6. Eine jede Zahl von der Form $10a^2 + b^2$ kann, ausser den Zahlen 2 und 10 keine anderen Primzahlen zu Theilern haben, als die in folgenden 8 Formeln enthalten sind:

$40m + 1$	$40m + 7$
$40m + 9$	$40m + 23$
$40m + 11$	$40m + 37$
$40m + 19$	$40m + 13$.

Man habe z. E. $10^{2n+1}+1$: so läßt sich dieser Ausdruck in $10.(10^n)^2+1$ verwandeln, und so mit $10a^2+b^2$ vergleichen. Und da $10^{2n+1}+1$ ein Factor $100^{2n+1}-1$ ist: so müssen die Theiler von $10^{2n+1}+1$ zugleich auch die Form $2.(2n+1)m+1$ haben; wodurch die Theilungs-Versuche wiederum stark abgekürzt werden.

Ueberhaupt, da in der Formel 10^m-1, wenn sie durch die Primzahl a theilbar ist, m allemal entweder $=a-1$, oder ein Vielfaches oder aber ein Theiler von $a-1$ seyn muß: so darf man nur die vorgegebene, oder durch obige Lehrsätze gefundene, um eine Unität verminderte Primzahl $a-1$ in ihre Factoren zerfällen, und sehen, ob sie mit m commensurabel sind. Man wollte z. E. die Tafel der Theiler der Zahlen $10^{11}-1$ bis $10^{32}-1$ vollständiger machen, und man soll untersuchen, ob die Primzahl 859 ein Theiler einer dieser Zahlen sey. Nun findet sich $859-1=2.3.11.13$; und die Factoren 11, 13, 2.11, 2.13, zeigen mir an, daß der Bruch $\frac{1}{859}$ entweder 11, 13, 22 oder 26 periodische Ziffern geben, und also die Primzahl 859 ein Theiler von $10^{11}\mp1$, $10^{13}\mp1$, seyn könne; wie sie denn wirklich von $(10^{13}+1).(10^{13}-1)$ ein Theiler ist, und $\frac{1}{859}$, folglich 26 wiederkehrende Ziffern giebt. Auch ist $10^{13}+1=10.(10^6)^2+1$; und 859 ist nicht allein $=26.33+1$, sondern auch, nach dem vorhergehenden 6ten Lehrsatze, zugleich

gleich $= 40 . 21 + 19$. — Die nächstfolgende Primzahl hingegen giebt $863 - 1 = 2 . 431$, und würde also, da 431 wieder eine Primzahl ist, nur bey $10^{431} + 1$ oder $10^{862} - 1$, die man nie gebrauchen wird, zur Theilung dienen können.

Noch ist anmerkenswerth, daß, wenn eine Primzahl $\frac{1}{a}$ eine gerade Anzahl wiederkehrender Ziffern $= n$ giebt, die Summe der positiven Reste der 1ten und $\left(\frac{1}{2}n+1\right)$ten, der 2ten und $\left(\frac{1}{2}n+2\right)$ten, der 3ten und $\left(\frac{1}{2}n+3\right)$ten Division u. s. w. allemal zusammen $= a$ ausmacht. Ueberhaupt aber ist die Summe sämmtlicher positiven Reste, auch wenn n ungerade ist, jederzeit $= a$ oder ein Vielfaches von a. So z. E. giebt

$\frac{1}{7}$ die Reste 1, 3, 2, 6, 4, 5; oder 1, 3, 2, -1, -3, -2.

$\frac{1}{11}$ = = = 1, 10; oder $+1$, -1.

$\frac{1}{13}$ = = = 1, 10, 9, 12, 3, 4; oder 1, 10, -4, -1, -10, $+4$.

$\frac{1}{37}$ = = = 1, 10, 26; oder 1, 10, -11.

 $\frac{1}{41}$ die

$\frac{1}{41}$ die Reste 1, 10, 18, 16, —4.

$\frac{1}{101}$ = = = 1, 10, 100, 91; oder 1, 10, —1, —10.

$\frac{1}{137}$ = = = 1, 10, 100, 41, —1, —10, —100, —41.

&c.

Es ist bekannt, daß Clausberg, und andere, von den Resten von $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{11}$ Gelegenheit genommen haben, die Kennzeichen, ob eine gegebene Zahl durch 7 oder 11 theilbar sey, zu bestimmen. Auf ähnliche Art kann man auch untersuchen, ob eine Zahl durch 13, 37, 101, 137, u. s. w. sich dividiren lasse. Will man z. E. wissen, ob eine Zahl durch 13 ohne Rest theilbar sey: so theile man diese Zahl (weil der Theiler 13, 3 positive und 3 gleich große negative Reste hat,) von der Rechten zur Linken in Classen von 3 zu 3 Ziffern ab, addire die ungeraden, so wie die geraden Classen, jede besonders, und ziehe eine Summe von der andern ab; und da der 1te und 2te Rest von $\frac{1}{131}$, 1 und 10, der 3te Rest aber —4 ist: so subtrahire man die 4fache Zahl der Hunderte des Restes, wenn welche vorhanden sind, von den Zehnern und Einern desselben; und es wird, wenn die ganze Zahl in 13 theilbar ist, entweder 0 oder ein Multiplum von 13 restiren. Z. E.

$$16|875|761|669$$

$$875 + 669 = 1544$$
$$16 + 761 = 777 -$$
$$7|67$$
$$4 \cdot 7 = |28 -$$
$$39 = 3 \cdot 13.$$

Man kann auch von den Summen so oftmal 13 wegwerfen oder abziehen, als es sich thun läßt, und als man zur Abkürzung der Probe dienlich findet. Hier z. E. kann von der Summe 1544, 1300 oder 1339 weggeworfen werden, so daß nur 244 oder 205 bleiben, die von 777 abgezogen, 5,33 oder 5,72 übrig lassen; da dann die 5 Hunderte, 4mal genommen, von 33 oder 72 subtrahirt, wieder 13m geben. — Ja man kann die Sache noch weiter abkürzen; z. B. bey der Summe 875+669 machen die Einer 5+9, 14, wofür ich 14—13=1 setze; die Zehner 6+7 thun 13; dafür setze ich 13—13=0; und von den Hunderten 8+6 werfe ich wieder 13 weg; so daß ich für die Summe 101 setzen, und im übrigen, wie vorher gesagt, verfahren kann. Dergleichen Abkürzung findet auch bey folgenden Beyspielen statt.

Von $\frac{1}{37}$ sind die Reste, wie wir gesehen haben, =1, 10, —11. Um also die Theilbarkeit einer Zahl mit 37 zu versuchen, wird solche in Classen von 3 Ziffern getheilt; sämmtliche Classen werden addirt, und von den Hunderten, 11 mal ge-

nommen, die Zehner abgezogen. Der Rest muß 37m seyn. Z. E.

$$
\begin{array}{r}
7|787|946|887 \\
946 \\
787 \\
7 \\
\hline
26|27 - \\
11 \cdot 26 = |286 \\
\hline
259 = 7 \cdot 37.
\end{array}
$$

Die Theilbarkeit einer Zahl mit 101 zu probiren, erfodert weiter nichts, als die abwechselnden Classen von 2 zu 2 Ziffern zu addiren, und die Summen von einander abzuziehen; weil die Reste nur 1, 10, −1, −10 sind. Z. E.

$9|97|54|67$ giebt $(67 + 97) - (54 + 9) = 164 - 63 = 101.$

Wollte man die Theilbarkeit einer Zahl mit 137 versuchen: so müßte man solche, da $\frac{1}{137}$, 4 positive und eben so viele und gleich große negative Reste giebt, in Classen von 4 und 4 Ziffern eintheilen, und die Summen der geraden und ungeraden Classen von einander abziehen; und da der 4te und 8te Rest von $\frac{1}{137} = \mp 41$ ist: so werden die Tausende des Rests der Summen, 41 mal genommen, zu den Hunderten ꝛc. addirt; welche Summe dann, wenn die Zahl in 137 theilbar ist $= 137m$ seyn wird. Z. E.

$$30 | 0167 | 4247$$
$$+ 30$$
$$4277$$
$$- 167$$
$$4 | 110$$
$$4 . 41 = | 164 +$$
$$274 = 2 . 137 .$$

Wie man mit andern Zahlen, nach Beschaffenheit ihrer Reste, (die aber freylich, allenfalls aus einer eigenen Tabelle, bekannt seyn müssen,) zu verfahren habe, wird aus diesen Beyspielen sattsam klar seyn. Schade nur, daß die bequeme Brauchbarkeit von dergleichen Proben nur auf einige wenige Zahlen eingeschränkt ist; indem die Anzahl der periodischen Ziffern und folglich auch der Reste der meisten Zahlen, entweder zu groß ist, oder aber die unbequemen Reste, wie bey 41, mehrere Multiplicationen und also Weitläuftigkeiten verursachen.

In den folgenden 2 Tafeln bedeuten die mit einem Sternchen bezeichneten Zahlen, solche, bey denen nicht vollständig untersuchet worden, ob sie Primzahlen sind.

I. Tafel.

m.	$\frac{10^m - 1}{10 - 1}$.
1.	1.
2.	11.
3.	111 = 3. 37.
4.	1111 = 11. 101.
5.	11111 = 41. 271.
6.	111111 = 3. 7. 11. 13. 37.
7.	1,111111 = 239. 4649.
8.	11,111111 = 11. 73. 101. 137.
9.	111,111111 = 3^2. 37. 333667.
10.	1111,111111 = 11. 41. 271. 9091.
11.	11111,111111. *
12.	111111,111111 = 3. 7. 11. 13. 37. 101. 9901.
13.	53. 79. 265371653. *
14.	11. 239. 4649. 909091.
15.	3. 31. 37. 41. 271. 2906161. *
16.	11. 17. 73. 101. 137. 5882353.
17.	11111,111111,111111. *
18.	3^2. 7. 11. 13. 19. 37. 52579. 333667.
19.	19 mal 1. *
20.	11. 41. 101. 271. 3541. 9091. 27961. *
21.	3. 37. 43. 239. 1933. 4649. 10,838689. *
22.	11^2. 23. 4093. 8779. * 11111,111111. *
23.	23 mal 1. *
24.	3. 7. 11. 13. 37. 73. 101. 137. 9901. 99990001. *
25.	41. 271. 100001000010000100001. *
26.	11. 53. 79. 859. 265371653. * 1058313049. *
27.	3^3. 37. 757. 333667. 440334654777631. *
28.	11. 29. 101. 239. 281. 4649. 909091. 121499449. *
29.	29 mal 1. * theilbar durch 3191.
30.	3. 7. 11. 13. 31. 37. 41. 211. 241. 271. 2161. 9091. 2906161. *
31.	31 mal 1. * theilhar durch 2791.
32.	11. 17. 73. 101. 137. 353. 449. 641. 1409. 69857. 5882353.

II. Tafel.

m.	$10^m + 1$.
1.	11.
2.	101.
3.	1001 = 7. 11. 13.
4.	10001 = 73. 137.
5.	100001 = 11. 9091.
6.	1,000001 = 101. 9901.
7.	10,000001 = 11. 909091.
8.	100,000001 = 17. 5,882353.
9.	1000,000001 = 7. 11. 13. 19. 52579.
10.	10000,000001 = 101. 99,009901. *
11.	$10^{11} + 1 = 11^2$. 23. 35,932447. *
12.	$10^{12} + 1$ = 73. 137. 99,990001. *
13.	$10^{13} + 1$ = 11. 859. 1058,313049. *
14.	$10^{14} + 1$ = 29. 101. 281. 121,499449. *
15.	$10^{15} + 1$ = 7. 11. 13. 211. 241. 2161. 9091.
16.	$10^{16} + 1$ = 353. 449. 641. 1409. 69857.

Zusätze zu dieses Vten Bandes I. Theile.

I.

Zu S. 16.

Wegen einer Stelle hier, die ich allerdings besser gethan hätte, wegzustreichen, als sie mit einer apologischen Note begleitet, durchgehen zu lassen, hat der seitdem immer berühmter gewordene Mathematiker und Dichter, Herr Hauptmann von Stamford in Potsdam, folgenden Brief an mich geschrieben.

„Daß Ew. — des seel. Lamberts deutschen gelehrten Briefwechsel herausgeben, erfuhr ich erst vor kurzem ganz zufälligerweise, und nachdem schon der erste Theil des 5ten und letzten Bandes desselben, der auch meine Briefe enthält, völlig abgedruckt war. Hätte ich von dieser Sache früher etwas gehört: so hatte ich Ew. — inständigst gebeten, mir gedachte Briefe, weil ich von keinem derselben eine Abschrift behalten, zum Durchsehn anzuvertrauen; und dann wäre der Scherz über Herrn Rosenthal im 5ten dieser Briefe gewißlich nicht stehn geblieben. Ich begreife nicht, wie ich mir diesen Scherz, obwohl nur in einem Briefe, von dem ich nicht glaubte, daß er jemals dem Publikum in die Hände kommen würde, habe erlauben können; und ich wüßte, Ew. — nicht genug zu danken, wenn Sie die Güte gehabt hätten, ihn zu vertilgen; denn,

daß

daß er Ihnen aufgefallen, beweiset Ihre beygefügte Anmerkung. Herr **Rosenthal** ist ein edler, rechtschaffener Mann, dessen Talente und vortrefliche Eigenschaften des Herzens und Verstandes mich bewogen, seine Bekanntschaft und Freundschaft zu suchen, und der überzeugt seyn muß, daß ich ihn jederzeit von Grund meines Herzens hochschätzte und liebte. Dies läßt mich hoffen, daß er mir jene ohne Ueberlegung und vielleicht in der Eile hingeschriebene Worte, verzeihen werde, die ich gern wieder gut machen möchte, und mit nichts wieder gut zu machen weiß, als daß ich Ew. Wohlgeboren bitte, dieses Schreiben dem letzten Theil des Lambertschen Briefwechsels anzuhängen."

Potsdam, den 21. May 1785.

U.

Zu S. 34.

Ueber meine Anmerkung auf dieser Seite, habe ich von zwey Freunden folgende Berichtigungen No. 1 und 2. erhalten; die erste ist von meinem berühmten Landsmanne Herrn **Nic. Fuß**, ordentl. Mitglied der Kayserl. Academie der Wissensch. in St. Petersburg; die andere von meinem gel. Bruder, Herrn **Daniel Bernoulli**, M. D. Professor der Wohlredenheit in Basel: beide kleinen Aufsätze waren französisch.

1.

St. Petersburg, den 15. Aug. 1785.

„Der neue Theil von Lamberts Briefwechsel, den ich so eben erhalte, ist sehr interessant. Die Geschichte der Primzahlen- (und Factoren-) Tafeln hat verdienet, daß sie in den Briefen die davon handeln, aufbehalten werde.

Die Formel des Herrn Felkel, in der Note S. 34. $r^3 = 2q^3 - p^3 + 6q$ ist richtig. Der Fehler oder Zweifel rühret von der Art her, wie er die Eigenschaft des Unterschiedes von 2 aufeinander folgenden Cubikzahlen ausgedrückt hat. Dieser Unterschied ist das Sechsfache der Summe aller vorhergehenden Zahlen, mit Inbegrif der Wurzel des kleinern Cubus, $+ 1$. Denn $q^3 - p^3 = 3aa + 3a + 1 = 3a(a + 1) + 1$; Folglich $q^3 - p^3 = 3pq + 1$.

Es sey $p = a$, $q = a + 1$, $r = a + 2$, so ist

$$\left.\begin{aligned} r^3 &= a^3 + 6aa + 12a + 8 \\ 2q^3 &= 2a^3 + 6aa + 6a + 2 \\ p^3 &= a^3 \end{aligned}\right\} \text{Folglich}$$

$r^3 - 2q^3 + p^3 = 6a + 6 = 6q$; und demnach $r^3 = 2q^3 - p^3 + 6q$.

2.

Basel, den 17. Sept. 1785.

In der Note S. 34 wird Herr Felkel irrig eines Fehlers beschuldiget, und gesagt, es scheine die

Gleichung müsse seyn $r^3 = 2q^3 - p^3 + 6q - 6$. Die Sache beruhet auf einem Mißverstande, indem unter dem Ausdruck alle vorhergehenden Zahlen, nicht 1, 2 &c. bis q exclusive, sondern mit Herrn Felkel, 1+2 . . . +q zu verstehen. Auch wäre sonst Herrn Felkels Versehen zu arg, weil sogar seine Voraussetzung falsch wäre. Uebrigens sehe ich nicht ein, warum Herr Felkel sich an die Gleichung $r^3 = 2q^3 - p^3 + 6q$ hält, und sie dieser: $r^3 = q^3 + 3qq + 3q + 1$ vorziehet, welche letztere ganz einfach und schon erwiesen ist, und worinn nur 2 Buchstaben vorkommen. Eben so wenig sehe ich, wie man aus Herrn Felkels Gleichung den Lehrsatz von welchem die Rede ist, herleiten könnte, da er sich hingegen aus den andern leicht ziehen läßt; und zwar wie folget:

$$
\begin{aligned}
r^3 &= q^3 + 3qq + 3q + 1 \\
&= q^3 + 3q(q+1) + 1 \\
r^3 - q^3 &= 3q(q+1) + 1 \\
&= 6.\frac{1}{2}q(q+1) + 1
\end{aligned}
$$

Nun ist $\frac{1}{2}q(q+1)$ die Summe aller natürlichen Zahlen, von 1 bis p inclus. Folglich der quästionirte Unterschied $(r^3 - q^3)$ gleich 6 mal diese Summe +1. W. z. B. w.

W. Von

W.

Von Herrn Felkel selbst, welcher an dem halben Bande der vor uns liegt, so viel Antheil hat, habe ich seit dessen Erscheinung noch mehrere Briefe erhalten; und da seine Erfindungsart der Factoren, so wie überhaupt sein Benehmen bey dieser Sache etwas scharf und freymüthig beurtheilet worden, so war zu erwarten, daß er sich gegen mich darüber beschweren würde. Unter andern hat er mir den gleichfolgenden Aufsatz ausdrücklich zur Bekanntmachung überschickt, *) und ich kann ihm nicht versagen, ihn hier abdrucken zu lassen. **)

Anton Felkels,

abgenöthigte Rechtfertigung über einige im Vten Bande des Lambertischen Briefwechsels ihm unrecht zur Last gelegte, oder sonst mißverstandene Umstände.

Hochdero preiswürdigstes Bestreben, den lambertischen Briefwechsel durch eingerückte Thatsachen

*) Datirt von den Feldern und Wäldern der Herrschaft Sebusitz, den 28. October 1785; unterschrieben: **Anton Felkel**, dermaliger Landmesser.

**) Nur sind mit des gutdenkenden Herrn Verfassers Genehmigung einige in der ersten Hitze allzu empfindlich gerathene Stellen gemildert worden. B.

chen und Belege zu unterstützen, um die darinn enthaltenen Wahrheiten in ihr mögliches Licht zu setzen, würde mich schon aus Liebe für allgemeine Vortheile verbinden; wenn ich auch nicht aus dem V. Bande, der vornemlich die Factorengeschichte zum Gegenstande hat, die deutlichsten Merkmale einer unverdienten Zuneigung zu mir wahrgenommen hätte. Meine dermaligen Geschäfte sind zwar meinen Lieblingsstudien allzu wenig günstig, als daß ich der Sache im Zusammenhange nachdenken könnte. Doch ist der Inhalt dieses Bandes allzu wichtig für mich, und die Zeitumstände zu dringend, als daß ich, durch ein kurzes Stillschweigen, die Gelegenheit einer mir selbst schuldigen Rechtfertigung auf immer fahren lassen, und jenen Theil der Wahrheit, der mir, wo nicht allein, doch noch am besten bekannt ist, nicht nach Möglichkeit darlegen sollte. Ich schreibe also, so gut es mir in der Geschwindigkeit, und unter dem Gewimmel des unwissenden Haufens, der mich stündlich umgiebt, beyfällt.

Die Zeiten sind verstrichen, wo ein verewigter **Lambert** über mich ungehalten zu seyn, Ursache finden konnte; vorüber ist der Zeitpunkt, wo Herr Prof. **Hindenburg** noch im Dunkeln über meine Unternehmung urtheilte: er hat meine Werkzeuge, deren Erfolg und das Uebergewicht meiner Manipulation — mit Augen gesehen — Er hat Proben von meiner Billigkeit, Mäßigung und Hochachtung für sein Verdienst erfahren, da ich, seinen überwiegenden Einsichten — zu Liebe, ihm den Antrag machte — seinetwegen den fortgesetzten

Abdruck

Abdruck meiner Tafeln schriftlich aufzugeben, die weitere Berechnung aber, nach seiner Einsicht und seinem Gutbefinden zu veranstalten. Dieses waren die Folgen einer Reise, die ich im Herbste 1783 nach Leipzig unternahm, um seine theure Bekanntschaft zu machen. Was erfolgte aber? Herr Prof. Hindenburg ließ diese meine Aeußerung, die ich nicht ohne Verleugnung von mir gab, ins Leipziger Intelligenzblatt setzen. Dies veranlaßte mich im Herbste 1784 zu einer abermaligen Reise; die ich, um etwas entscheidendes zu thun, über Dresden, Leipzig, Halle, Berlin, Göttingen ꝛc. richtete, um die Gesinnungen mehrerer Gelehrten über mein Vorhaben in Erfahrung zu bringen. Die Nachricht aus Halle S. 130 zeigt den Erfolg; die 3 letzten Zeilen derselben aber meine bescheidene — Rache.

Vermuthlich war dieses noch nicht bekannt, da Herr Prof. Hindenburg noch fortfuhr, meine Wenigkeit in den Noten über seine Briefe herabzusetzen, und Beweise über ganz grundlose Umstände zusammen zu suchen. So z. B. mußte es, S. 189, und wo nur sonst Gelegenheit dazu ist, ein ausgemachter Handel seyn, daß mein Plan von 8 Kolonnen von Herrn Euler abgestolen wäre; da doch, allen Umständen gemäß, solcher eben zu der Zeit, da ich durch sehr ordentliche Stufen*) darauf kam, viel-

*) Ich habe den Hergang meiner Erfindung meistens im ersten Flug meiner Gedanken, folglich ohne systematischen Zusammenhang niedergeschrieben; diesen Aufsatz aber (welcher Umstand ihn

vielleicht erst der Akademie zu Petersburg vorgelegt, sicher kaum zum erstenmal abgedruckt worden ist. Da ich doch so deutlich und unbesorgt in meinem Vorberichte ꝛc. von der deutschen Algebra des Herrn Euler gestehe, daß solche mich zuerst im October 1775 auf die Betrachtung der Faktoren gebracht: in welcher Betrachtung ich eigentlich nur darum weiter gekommen bin, weil ich mich an anderseitige Kunstgriffe gar nicht zu binden entschlossen war. Es ist auch eine genauere Bekanntschaft mit mathem. Schriftstellern, zumal in andern Sprachen, mit meinen damaligen Geschäften und Umständen ganz incombinabel.

Zu näherer Beleuchtung dessen, folget hier eine kurze Geschichte meiner mathem. Studien, bis zu dieser Faktorenkrankheit. Nicht eher, als im Weinmonat 1774 (im 35sten Jahr meines Alters) zur Vakanzzeit, da ich der vielfältigen Methodenstreitigkeiten überdrüßig, eine angemessenere Speise für meinen Geist suchte, lernte ich das erste △ aus Euklids I. Buche (unter der Anleitung eines Baurischen Schülers, Lukas Ebe, kennen; hierauf las ich allein, so viel ich in sparsamen Stunden konnte. Schon damal spürte ich den Hang, von andern unabhängig zu forschen. Ich blieb nicht unver-

ihn zur Gültigkeit eines Dokuments erhebt) im October 1784, da er bereits 7 Jahre unberührt gelegen war, dem Herrn Prof. Meister in Göttingen, der eben Betrachtungen über die Gesetze der Faktoren machte, in Händen gelassen.

unversucht, eine eingebildete Quadratur des Kreises zu finden, nachdem ich, unwissend, und ohne eben weitere Folgen zu erwarten, von selbst auf die Quadratur des hippokratischen Halbmonds gekommen war. Das dritte Buch Euklids machte mich mit dem Zirkel mehr vertraut, so daß ich durch dessen Verbindung mit dem 6ten einen eigenen Aufsatz über die Eigenschaften der Winkel und Sehnen verfertigte, welcher mir aber verbrannt ist.

Von verschiedenen sonst nirgends gelesenen Gesetzen meiner Sehnenlehre fallen mir folgende bey: (s. Fig. 11.)

a) Alle durch den $\frac{1}{4}$ Bogen cd (eines durch den Mittelpunkt c und einen Quadranten bd beschriebenen Zirkels) bis an den größern Umkreis ad (aus b) gezogenen Sehnen werden in e so geschnitten, daß $be^2 + ef^2 = bd^2 = \frac{ab^2}{2}$.

b) Wenn 2 Sehnen einander senkrecht schneiden (mn, pq) in r, so sind die Quadrate aller 4 Segmente gleich dem Quadrat des Durchmessers; $pr^2 + mr^2 + rn^2 + qr^2 = ab^2$, u. m. a.

Die Beweise laße ich Kürze halber weg.

Durch eine so gestaltige Abhandlung des Zirkels, kam ich auch von selbst auf die quadratische Gleichung, bevor ich sie algebrisch kennen lernte. Aus geometrischer Vorliebe schrieb ich mir Simsons

sons lat. Abhandlung von Kegelschnitten ab, die mir auch verbrannt ist. So wurden die sparsamen Stunden eines Jahres zugebracht, mit lauter Linien und Zirkeln.

Erst die nachfolgende Vakanz, im Okt. 1775 wagte ich mich an die Eulersche Algebra, von welcher S. 34. des Briefwechsels, die Rede ist, und so war ich noch nicht im Stande, auf ein Plagium, aus den Petersburger ungedruckten Commentarien oder Journalen zu gedenken; noch dessen bedürftig gewesen; noch ist mir bis heute davon etwas (leider!) zu Gesicht gekommen. Damit aber meinem Geständnisse nichts an seiner Vollständigkeit gebreche, gestehe ich, zu meinem Leidwesen, daß selbst alle Nachahmung für mich Schwierigkeit bringt. Und dieses mag die Ursache seyn, daß mein Verfahren in mathematischen Gegenständen nicht allemal genug methodisch ist. Doch diese Beschwerlichkeit und die darauf gegründete besondere Art zu denken und zu untersuchen, hat mich vielleicht durch einen Vortheil entschädigt, auf einige Wahrheiten zu kommen, die einer strengern methodischen Untersuchung durch den Reichthum näher liegender Entdeckungen eben nicht allemal zu Gebote stehen: daher ich mir gefallen lassen muß, wenn Herr Hindenburg S. 201. unten, mit mir nicht allerdings zufrieden ist. Allein Vorwürfe zu ertragen, die man nicht verdient, leidet weder die Wahrheit, nach die Absicht öffentlicher, zumal mathematischen Schriften.

Daher ich auch aus der Uebereinstimmung meiner ersten und letzten Aeusserungen und Bemü-

 hungen

hungen, so viel in meiner — Macht gestanden ist, erwiesen zu seyn glaube, daß selbst der große Lambert in einigen Stellen, wo er meine Redlichkeit und gute Absicht in Zweifel zieht, sich geirret habe: S. 28. des Lamb. Briefw. V. B. Ich selbst habe mir zuweilen, ehe die Sache noch recht geläutert wurde, zu nah geredet, wie Herr Hindenburg S. 162. Note u, selbst gesteht: 2 Minuten S. 271. zu Auffindung aller Faktoren ist sicher 4mal zu hoch angesetzt ꝛc. Was aber von der Schwierigkeit, berechnete Tafeln umzugießen, S. 103. gesaget wird, widerspricht der Erfolg, durch welchen ich stündlich bis 800 Zahlen umarbeite, das ist, die Faktoren davon übersetze. Ueberhaupt könnte ich bey meiner dermaligen Vorrichtung, die mir durch Entfernung des Gehilfen alle müßigen Stunden eigen macht, ohne Nachtheil der Geschwindigkeit, noch weit mehr als vorhin sagen und versprechen — Genug ich habe nie wider meine Ueberzeugung gehandelt, weder die Liebe — noch die Wahrheit — geflissentlich verletzet.

Meine Ausfälle, die ich in meiner Nachricht, S. 85 — 104, auf meine Gegner gemacht habe, könnte ich heute um so weniger widerrufen, da derselben Nebenabsichten nur allzu deutlich in die Augen fallen. Ich darf so gar nicht mehr zweifeln, eine 3monatliche Zurücksetzung des Datums, welche ich durch meine zweyerley Data zu verstehen gab, errathen zu haben. Um endlich meiner Zurückhaltung das Anstößige zu benehmen; so weiß die ganze Welt, was innerhalb 18 Monaten, ausser meinen Berufsarbeiten durch meine Hände geschehen

schehen ist. Man weiß die kurze Vorbereitung in den sparsamen Nebenstunden einer Jahresfrist, die mich auf bessere Zeit und Gelegenheit warten hieß.

Was mir im Inhalt S. XIX. ausgestellet wird, betrift eben eine unreife Arbeit, deren Frucht zwar sicher, aber unenthüllet war: die glückliche Aussicht aber, dazu, nach seiner endlichen Vollendung, einen Mazänaten zu finden, hat sich, wider meine Schuld bis heute verzogen. Nun will ich noch kürzlich einige für mich bedenkliche Stellen des oft erwähnten Bandes anführen, und kürzlich beantworten. Ein gefälliger Gebrauch derselben wird unpartheyischen Wahrheitsfreunden gewiß willkommen seyn.

Inhalt S. XIX. Schonung. Möchte doch Herr Hindenburg so billig, wie andere seyn, wo er nicht schonen will.

S. 27. 28. Die übeln Absichten, die mir hier zugemuthet werden, widerlegt die That: Meine Aeusserungen S. 63. scheinen dabey Bedenklichkeiten veranlaßt zu haben. Nun aber dürfte man doch die Uebereinstimmung der Sache mit den übertrieben scheinenden Verheissungen so leicht nicht mehr in Zweifel ziehen.

S. 34—36. Auch dieses sind Proben meines späten Anfangs und meiner späten Vorbereitung zu mathem. Unternehmungen.

S. 121. Die Ursachen dieser Unfruchtbarkeit zeige ich im vorhergehenden.

S. 122.

S. 122. Es wäre zu wünschen, Herr Hindenburg hätte nicht alles in einem falschen Lichte dargestellet: zu einer Zeit, da er das ehmalige Dunkle — schon besser einsehen konnte, und als — Kunstrichter einzusehen, schuldig war. —

S. 128. 130. Was hier von einem Hrn. Rödicke gesaget wird, wünschte ich zurück zu nehmen. Ich habe ihn verkannt. Ich suchte an ihm einen fleißigen Arbeiter — einen zuverlässigen Correspondenten — beides vergebens. —

S. 138. O leidige Folgen der neidigen Erbsünde! Ein Freund, der um die ganze Sache sich nicht im geringsten bekümmerte; sobald die Hofnung eines nahen Nutzens verschwand, wird nun auf einmal zum Urheber eines Werkzeuges, welches die Welt längst unter einem andern Namen kannte. — Wer muß doch dieser getreue Dolmetscher seyn?

S. 142—150. Nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit kann es Hrn. Hindenburg nie Ernst gewesen seyn, *) 5 Millionen zu liefern, die er, eigenem Geständnisse gemäß, weder in der Macht eigener noch fremder Hände fand. Die Widersprüche seiner öffentlichen Nachricht zeigen es deutlich genug, ohne sie noch einmal zu rügen. Doch wie konnte er sonst Arges von andern denken und schreiben, indem sie mehr versprochen, weil sie mehr leisten konnten? Doch ich rede hier von mechanischen

Fertig-

*) Ich bin gerade vom Gegentheil überzeuget, obgleich das Unternehmen nicht ausgeführet worden. B.

Fertigkeiten, die er nicht für seine Sache ausgiebt. Man lasse aber den Erfolg reden, welcher meinen Worten ohne Widerrede entspricht!

S. 153. Gerühmten Kenntnissen. Das läßt sich wohl einzig auf die Rechnungsvortheile beschränken, wo ich eben nicht unrecht hatte — nicht von Einsichten, wie es Herr Lambert damal genommen haben mag.

S. 155. Note l. In Fällen, wo der Erfolg anstatt aller Beweise spricht, fällt wohl die Auktorität weg. Und so sie je gegen mich gegolten hätte, so würde meine neue Vorrichtung wohl alle Patronen aufwägen.

S. 156. Note n. Diese Priorität ist mir um so gleichgültiger, weil ich, meinem Vorberichte gemäß, schon vor mehr als 9 Jahren daran nicht gezweifelt habe. Ich sagte ja dort schon: sie rechneten seit 1770. Ja ich gründe die Vorzüge meiner Berechnung vornehmlich auf meinen späten, doch in aller Absicht von andern unabhängigen Anfang. Genug! daß ich quasi-prioritätisch, der erste den Muth gefaßt, öffentlich aufzutreten, und meines Uebergewichts versichert, so gleich unbesorgt seyn durfte, von irgend einem zurückgesetzt zu werden: so wenig ich übrigens, meinen Umständen gemäß, von allem, was vorging, unterrichtet seyn konnte. Mit der Originalität hat es ein ganz anders Bewenden, und gehöret das mir angeschuldigte Plagium unter jene ungereimten Dinge, die man von einem Hindenburgischen Scharfsinne nie

erwarten sollte. Sonst ist diese Note eine Bestätigung des bereits gesagten: Im Oktober fing ich an, darüber nachzudenken, im November zu rechnen.

S. 157. Glücklicher Gedanke. Zum Glücke, daß er nicht der einzige, sondern ein Glied einer Kette war, wie es aus meinem ersten Aufsatze, aus Göttingen zu ersehen seyn kann. Die vermeinten Vorwürfe treffen mich nicht: ich machte die Maschine sammt Beschreibung sogleich allgemein bekannt. Nicht Zurückhaltung, sondern Erwartung günstigerer Zeit — häufige Geschäfte, und widerabsichtlich sich eindrängende Lieblingsarbeiten ꝛc. machten es hinterstellig.

S. 158. 2 Minuten. Ein Uebereilungsfehler. Man setze $\frac{1}{2}$ Minute.

S. 159. Note q. Ganz ungegründet. Nicht einmal zufälliger Weise, sondern in schönster Stufenordnung, bin ich gleichsam nothwendig auf meinen Plan gekommen. Oftgedachter Aufsatz ist dessen ein geltender Beweis.

S. 160. Note s. Unbefangene Augenzeugen finden an meiner Maschine mehr Einfachheit als Künsteley; doch weniger Reibung als an der Hindenburgschen. —

S. 161. Zweydeutigkeit. Wer es weiß, was in 18 Monaten durch meine Hände geschehen ist, wird meine Worte nicht mehr auf die Goldwage legen.

Note

Note t daselbst. 2 Augenblicke (Tempo) finden alles. Doch es gelte von dem alten Plane, was man wolle!

S. 162. Note u. Was soll ich nun von der neuen, doppelt vortheilhaftern Vorrichtung sagen?

Causam ignorantiæ. Grundlos geargwohnet. Ich wußte wirklich im Okt. 1775 von allem noch nichts.

S. 163. Bloßes Addiren ꝛc. Dreyerley Vortheile waren unumgängliche Folgen meiner Betrachtungsart. Mein Aufsatz von 1776 zeigt dieses klar: meinen Vorgang vom Zählen zum Messen, zu einzelen und Hauptpatronen, dann zur Maschine, als Universalpatrone. Alle sind einfacher und wohlfeiler als die Hindenburgschen. — Und in der That ist mir S. 28. zu nah getreten worden.

S. 164. Benachrichtiget. Leider! daß ich in einigen Wochen erst alles aufsuchen mußte, was andere seit vielen Jahren wußten. Allein sicher hätte ich zu viel davon wissend — es nicht unternommen, mehr als andere thun zu wollen. Man sehe S. 102.

S. 165. Note w. Hier ist endlich die Wundersprache, die ich, als nicht Franzos, von Petersburg aus bis Wien verstanden haben soll — ehe sie noch nach Deutschland kam.

S. 167. Note x. Bekannt gemacht! Genug! daß man mich erst später — nachgeahmt — hat.

S. 171. Produkt oder die Primzahl. Da nun schon jeder sein eigner Redner ist: so habe doch wirklich ich — der erste — die Zergliederung der Zahlen in allen Faktoren aufs Tapet gebracht; welches Herr Lambert erst später vom Herrn Hindenburg gefordert — hat.

S. 172. Felkels Maschine. Ja! sie war eben unterweges! aber nicht so theuer, als man hier sagt.

S. 173. Note. Fällt mit der Basis Note q und w zusammen.

S. 175. Felkels Maschine. Nicht dieses — sondern weit mehrers — zeigt der Erfolg.

S. 185. Decimalbrüche. Ich bin so treuherzig, zu gestehen, daß mich diese Hindenburgsche Abhandlung zu einer ganz neuen Betrachtungsart — nicht bloß zehn- sondern ntheiliger Brüche veranlaßt hat, welche von weit aussehenden Folgen zu seyn scheint. Herr Hindenburg wolle aber die Güte haben, mir mit der Priorität nicht abermal die Originalität streitig machen zu wollen; wie er's mit einem Plane gemacht, der 1 Jahr nach meiner Erfindung erst nach Deutschland kam.

S. 187. Arbeit fast doppelt so groß. Mein Kunstgriff brachte sogleich die Ersparung neuer Mühe, und diese Quelle augenblicklicher Rechnungsproben mit sich. —

S. 189. Eulers Plan in Note ξ. Die Kunst, Unwahrheiten zu demonstriren — für wahr übermathematisch!

S. 191. Note v. Ganz übereilt. Wozu dann die ausgesetzten Tausende an ihren Stellen bey ✢, ✳, ✳? freylich willkührliche Zeichen — Und die ordentliche — Folge der Endesziffern! Wozu dann Machtsprüche, wo man aus Grundsätzen schließen soll?

Note π. Glück Ihnen, mein Herr! wenn Sie ohne Oekonomie der Zeit, des Raumes und der Kosten alles richten können!

S. 193. Note σ. Wenn nun meine Maschine die größten Faktoren eben so schnell, wie die kleinsten zeigt, so ist ja die Einförmigkeit auf meiner Seite ꝛc.

Ebenda oben. Felkels Buchstaben. Das widerspricht die That. —

S. 195—214. Auch dieses habe ich nicht umsonst gelesen; doch nicht plagiarisch; wie Hr. Hindenburg abermal S. 200, ohne die Vordersätze zu prüfen, behaupten will.

S. 201. Felkels Anordnung, ist mit S. 191. widerlegt; Doch ist sie nun abgeändert!

S. 202—204. Das Urtheil über meine Maschine ist etwas schief; und so es auch richtig wäre, so gilt es bey dermaliger Vorrichtung nicht mehr. Doch was läßt sich von partheyischen Kunstrichtern erwarten?

S. 216. Geltende Gesetz. Auf dieses führet meine Periodenrechnung.

S. 224. Euler. Nur Schelsucht — konnte einer nur durch zusammenhängende Schlüsse im Ganzen möglich werdenden Erfindung ein Stückwerk andichten.

S. 232. Zweyte Beylage. Es würde überflüssig seyn, einige Sätze dieser Beylage zu berichtigen, da die neue Vorrichtung der ganzen Sache eine neue und vollkommenere Gestalt gegeben hat.

S. 235. Verschiedene Daten. Die Art mit welcher Herr Prof. Hindenburg mich behandelt, macht mich darauf beharren, daß er seine im August 1776 herausgegebene Nachricht um 3 Monathe zurück datirt *), und mein hierauf zielend doppeltes Datum mit Recht veranlaßt hat. **)

S. 239.

*) Dies ist gar nicht wahrscheinlich; eine giltige Ursache des späteren Herausgebens, die man einem Manne, wie Herr Hindenburg glauben muß, sagt er selbst S. 137. 138: Herr F. glaubte selbst noch am 28ten Sept. da er den Briefwechsel schon in Händen hatte, „daß er sich in Ansehung der „vermeinten List geirret habe.“

B.

**) Die zweyerley Daten sind einzig nach Leipzig und Berlin gesandt worden, indem, wenigst am ersten Orte, die Absicht nicht fehl geschlagen hat. Das rechte Datum war vom 1. September.

F.

S. 239. **Priorität.** Wie gleichgültig mir diese zu aller Zeit gewesen sey, zeigt mein Ausdruck von 1776: **Sie rechneten seit** 1770. **Nur die Originalität** konnte mir ein übelgesinnter streitig machen; es sey nun Plan oder Maschine gemeynt.

Die **Eulerschen** 8 Kolumnen betreffend, getraue ich mir zu wetten, und mit mehr als Buchdruckerischer Auctorität versiegelt zu belegen, daß im Jahr 1775 noch kein Eulerisches Exemplar in **Wien** gewesen. Doch es sey wie ihm wolle, ich sahe es bis heute noch nicht.

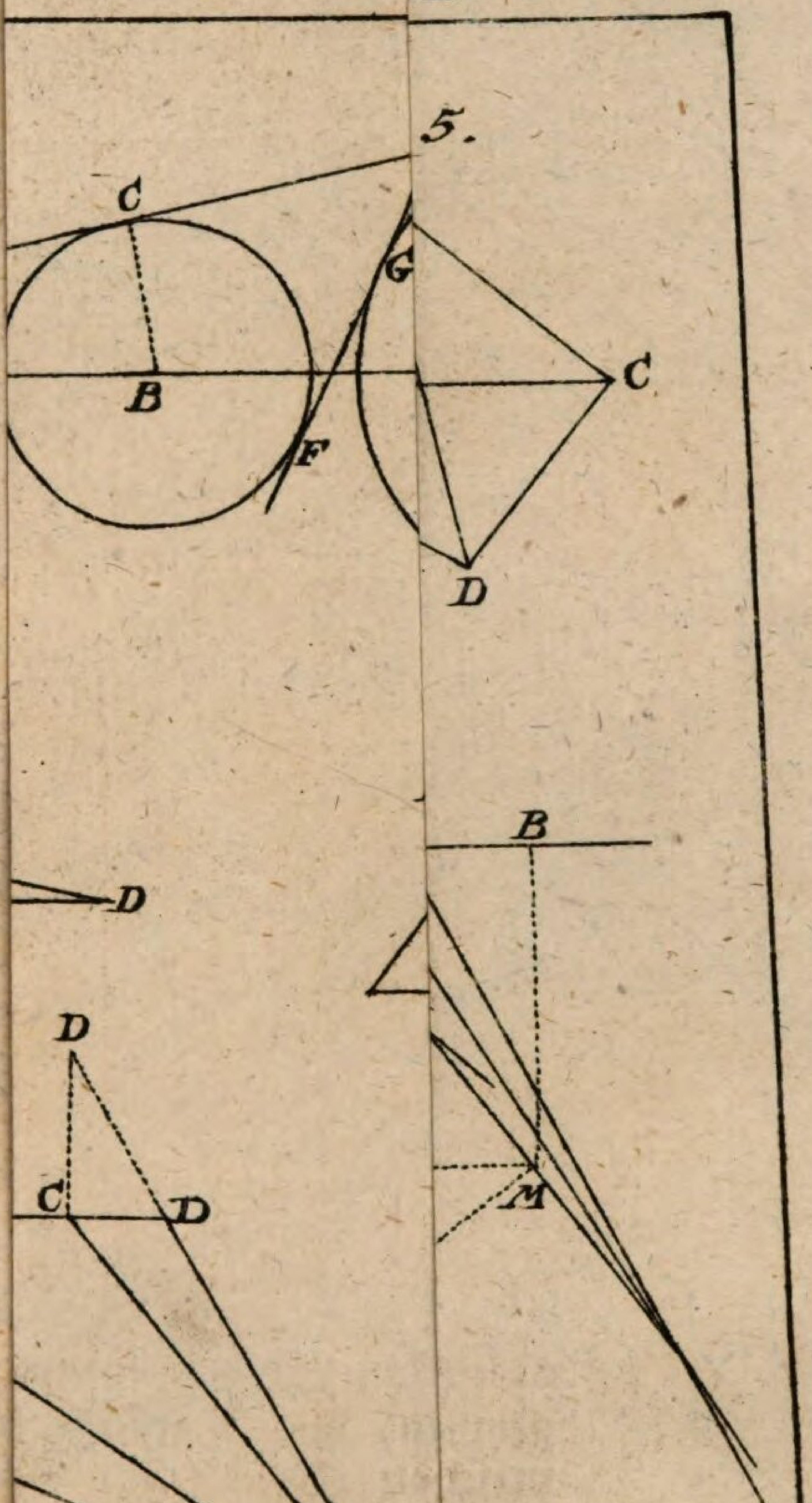
Aus den späteren Briefen des Herrn **Felkel** sehe ich, daß er unter mancherley Unruhen, Geschäften, und Besorgnissen für seinen künftigen Unterhalt, überaus thätig gewesen ist, und neben der weiteren Ausführung seiner Factoren-Tafeln, mit mehreren nützlichen mathematischen und pädagogischen Speculationen sich abgegeben hat. Gegen Anfang des J. 1786 wurde zwar sein Amt eines **Gräfl. Thunschen Schulendirectors**, bey verschiedenen vorgefallenen Reductionen aufgehoben; dem unerachtet aber versicherte ihm der vortrefliche **Graf von Thun**, dessen Gnade, Freygebigkeit und Liebe zu den Wissenschaften er nie genug rühmen kann, sein **altes Brod bey willkührlicher Beschäftigung**, bis zu einer anständigeren Versorgung; und diese Musse hat er benutzet, theils eine Reise nach **Wien** zu thun, theils einige sinn-

reiche

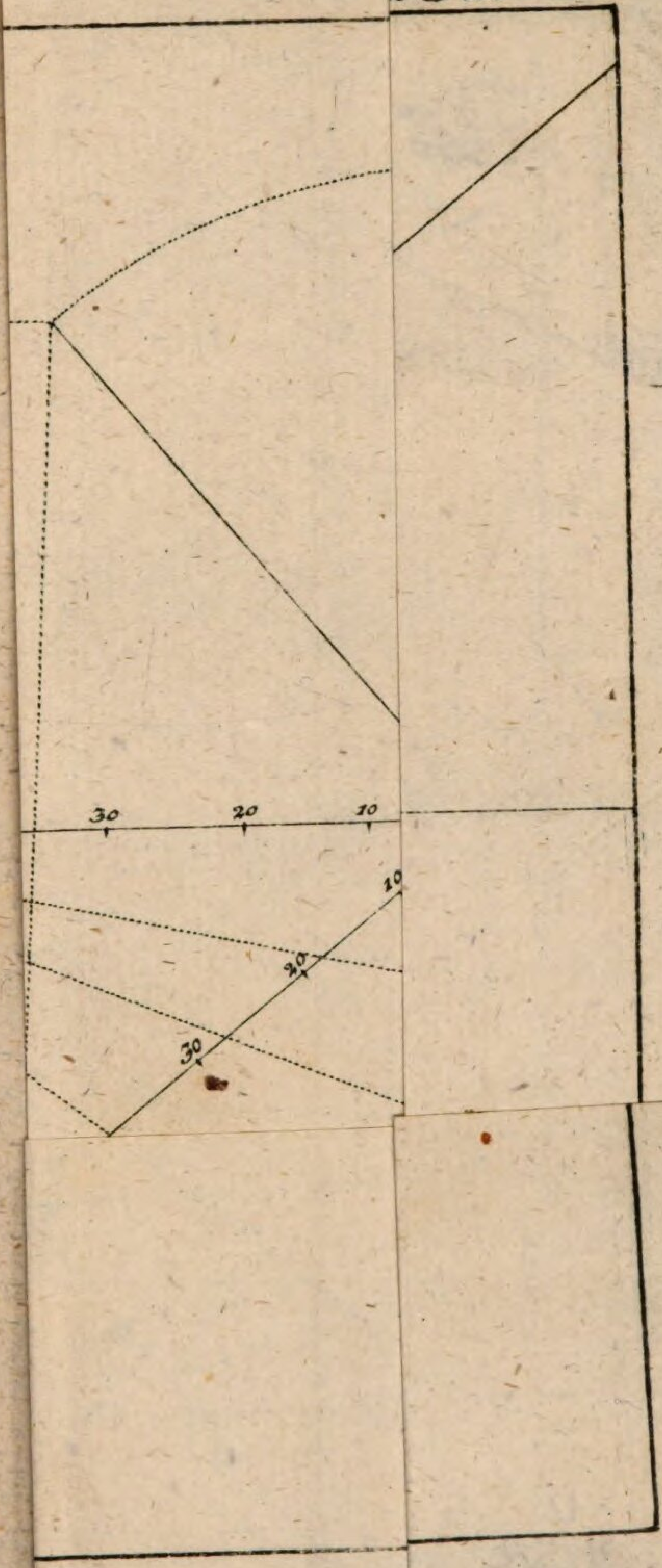
reiche Einfälle auszuführen. *) Z. B. ein neuerfundenes Leseinstrument; eine bequeme Rechenscheibe, als Verbesserung der Nepperschen Rechenstäbe; und insonderheit eine Erleichterung und Abkürzung des lateinischen Unterrichts, von deren gutem Erfolge, auch bey andern Sprachen, er mir aus eigener Erfahrung, viel merkwürdiges geschrieben hat. Aus seinem letzten Briefe, vom 25. May 1787, ersehe ich, daß er dieses Jahr wiederum in Sehusitz, auf den Gräfl. Thunschen Gütern befindlich, und mit Deutschen, lateinischen und Böhmischen, täglich 8 bis 9stündigen Unterrichte beschäftiget ist; daß er aber nach Verlauf eines Jahres von dieser Last soll befreyet werden. Ich wünsche, daß dieser schätzbare Mann alsdann seinem Wunsche gemäs in eine Lage komme, wo er entweder seine mathematischen Arbeiten und Erfindungen in sorgloser Ruhe ausführen, oder seine pädagogischen Einsichten in einer grösseren Sphäre, anwenden könne. B.

*) Ueber die schon an der 134. S. erwähnte Untersuchung der periodischen Brüche, hat Herr Felkel bereits im Sept. 1785 sich näher gegen mich ausgelassen, und in den Abhandlungen der Böhmischen Gesellschaft der Wissensch. auf das J. 1785 findet man seine Verwandlung der Bruchsperioden, nach den Gesetzen verschiedener Systeme, S. 135—174. eingerückt. Man sehe auch oben S. 498.

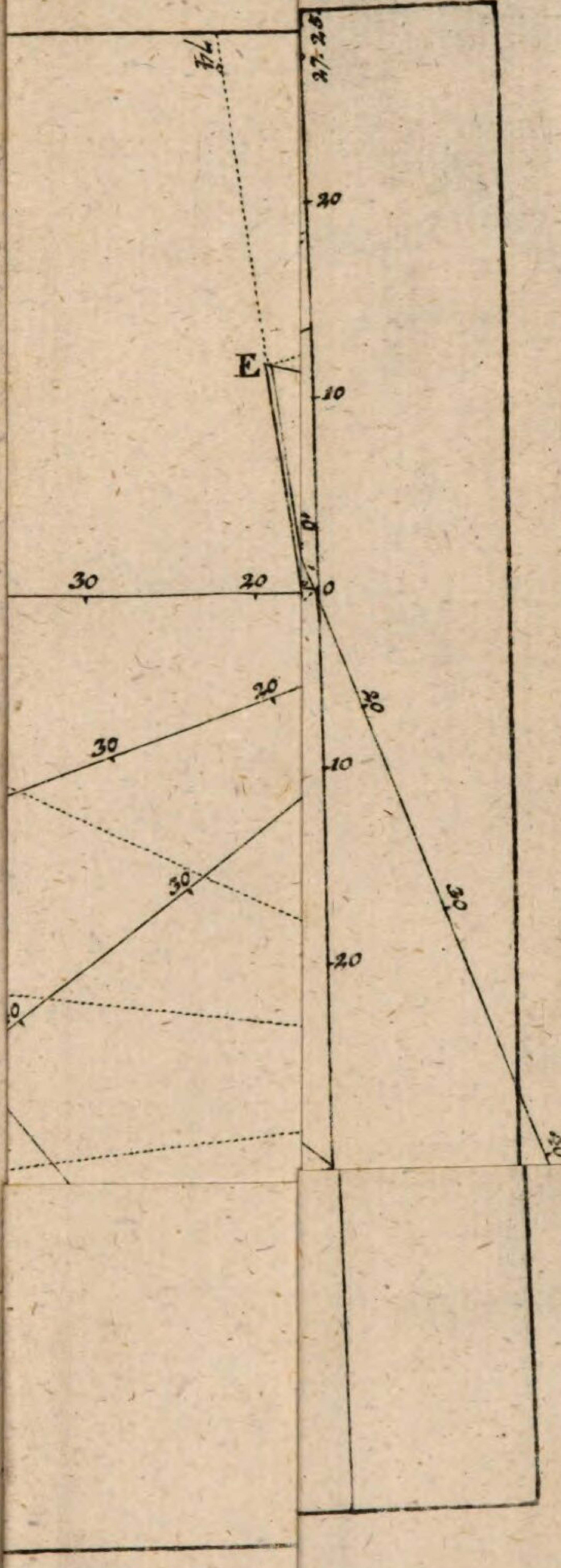
B. Tab. I.



3. Tab. II.



Tab. III.



Tab IV.

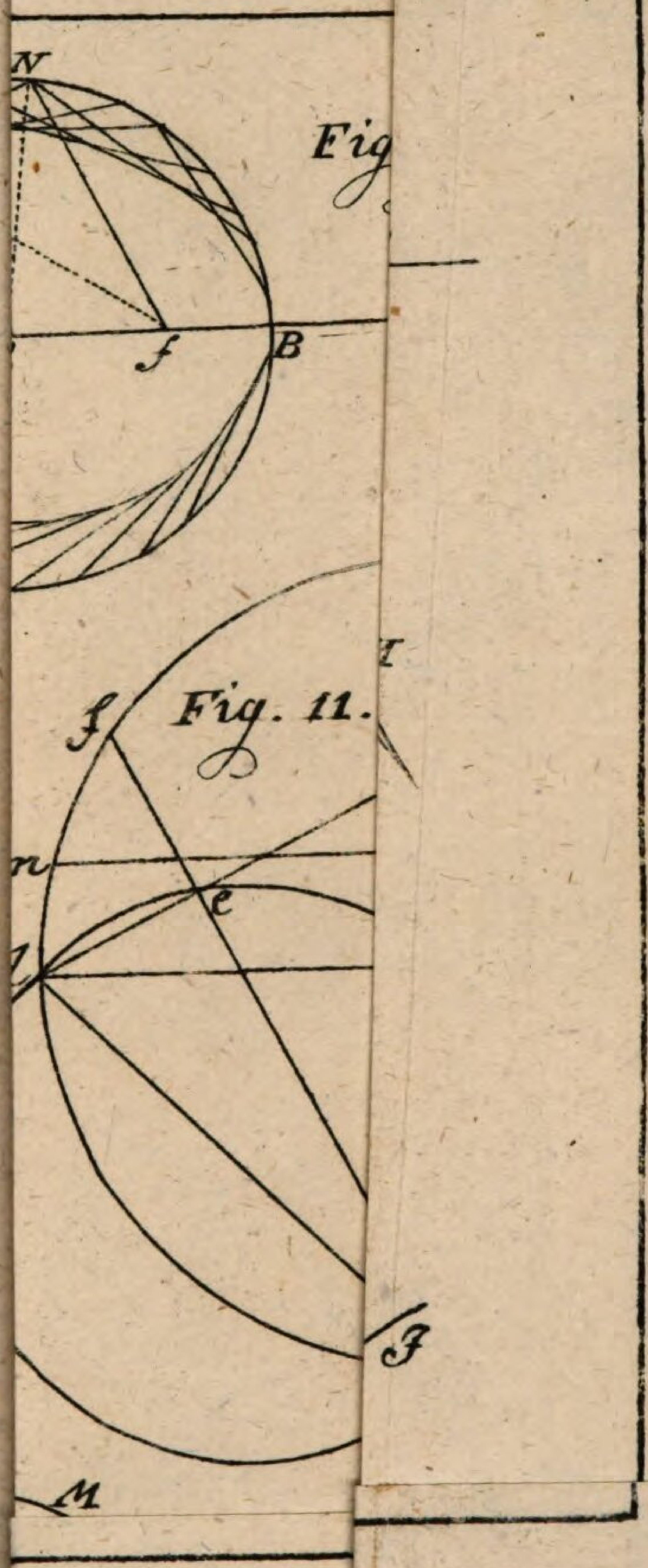


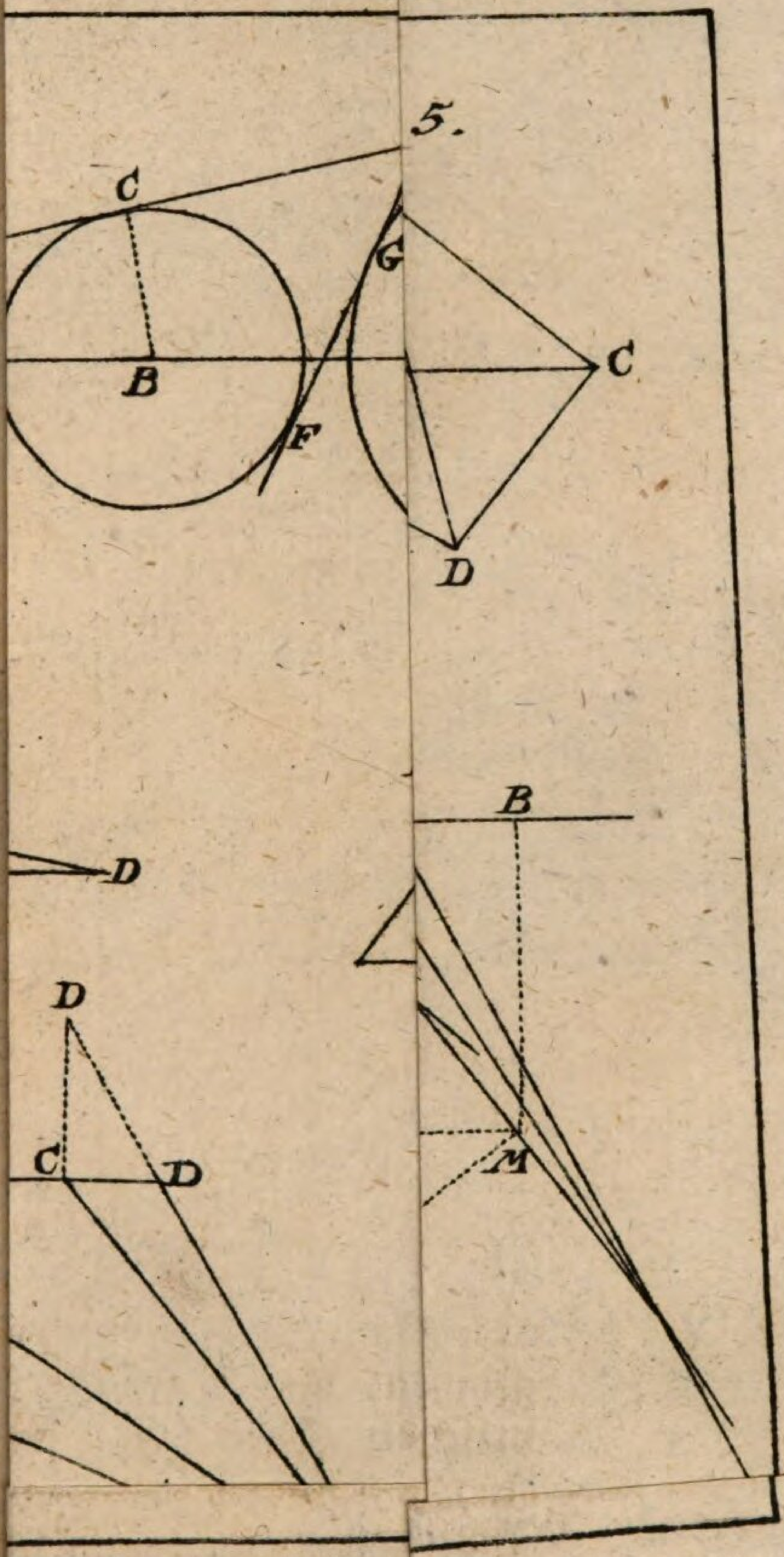
Fig. 11.

XX X.98

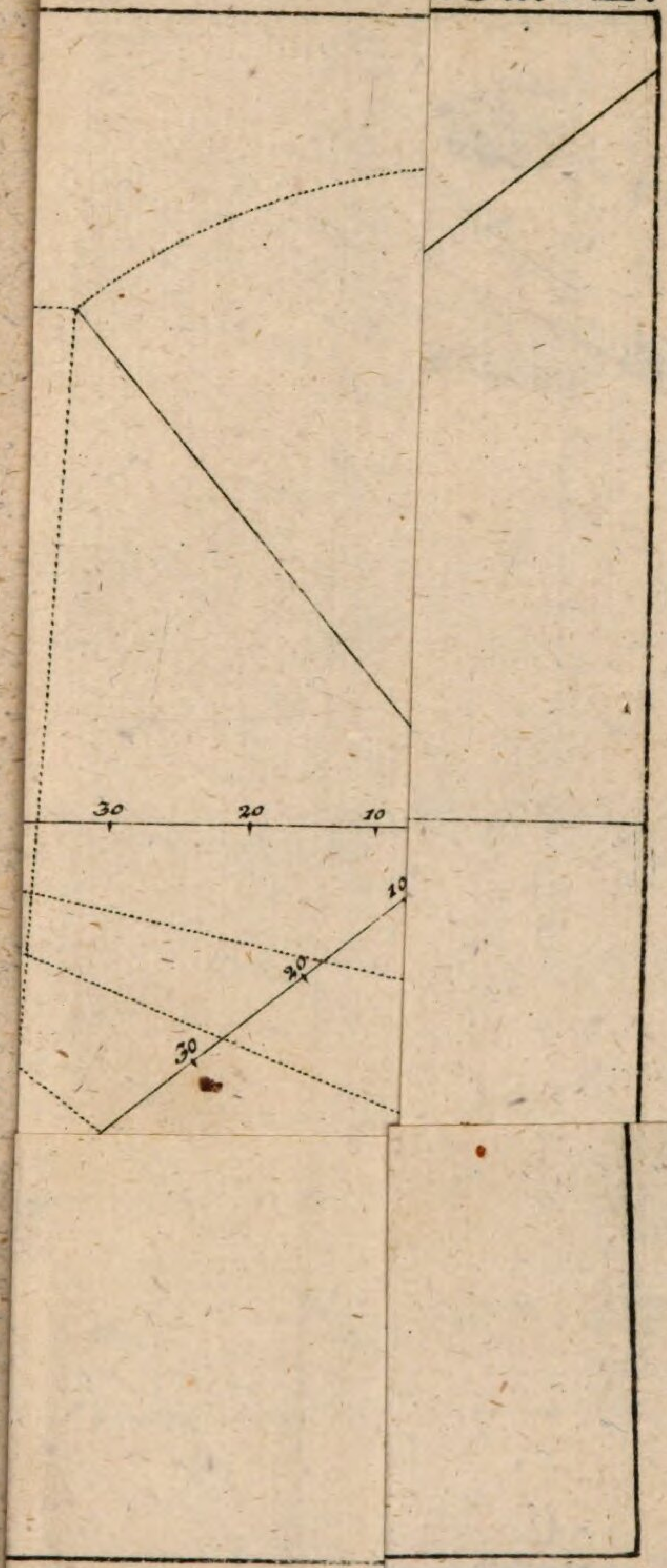
reiche Einfälle auszuführen. *) Z. B. ein neuerfundenes Leseinstrument; eine bequeme Rechenscheibe, als Verbesserung der Nepperschen Rechenstäbe; und insonderheit eine Erleichterung und Abkürzung des lateinischen Unterrichts, von deren gutem Erfolge, auch bey andern Sprachen, er mir aus eigener Erfahrung, viel merkwürdiges geschrieben hat. Aus seinem letzten Briefe, vom 25. May 1787, ersehe ich, daß er dieses Jahr wiederum in Sehusitz, auf den Gräfl. Thunschen Gütern befindlich, und mit Deutschen, Lateinischen und Böhmischen, täglich 8 bis 9stündigen Unterrichte beschäftiget ist; daß er aber nach Verlauf eines Jahres von dieser Last soll befreyet werden. Ich wünsche, daß dieser schätzbare Mann alsdann seinem Wunsche gemäs in eine Lage komme, wo er entweder seine mathematischen Arbeiten und Erfindungen in sorgloser Ruhe ausführen, oder seine pädagogischen Einsichten in einer grösseren Sphäre, anwenden könne. B.

*) Ueber die schon an der 134. S. erwähnte Untersuchung der periodischen Brüche, hat Herr Felkel bereits im Sept. 1785 sich näher gegen mich ausgelassen, und in den Abhandlungen der Böhmischen Gesellschaft der Wissensch. auf das J. 1785 findet man seine Verwandlung der Bruchsperioden, nach den Gesetzen verschiedener Systeme, S. 135—174. eingerückt. Man sehe auch oben S. 498.

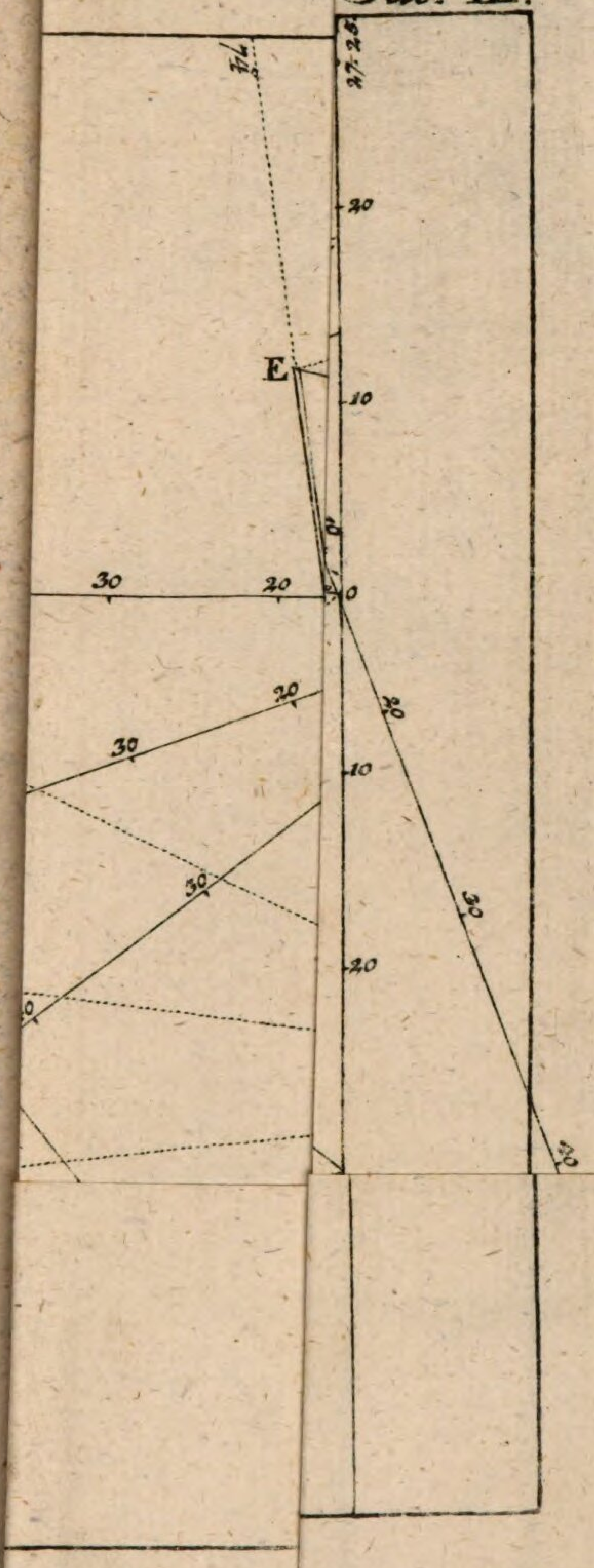
B. Tab. I.



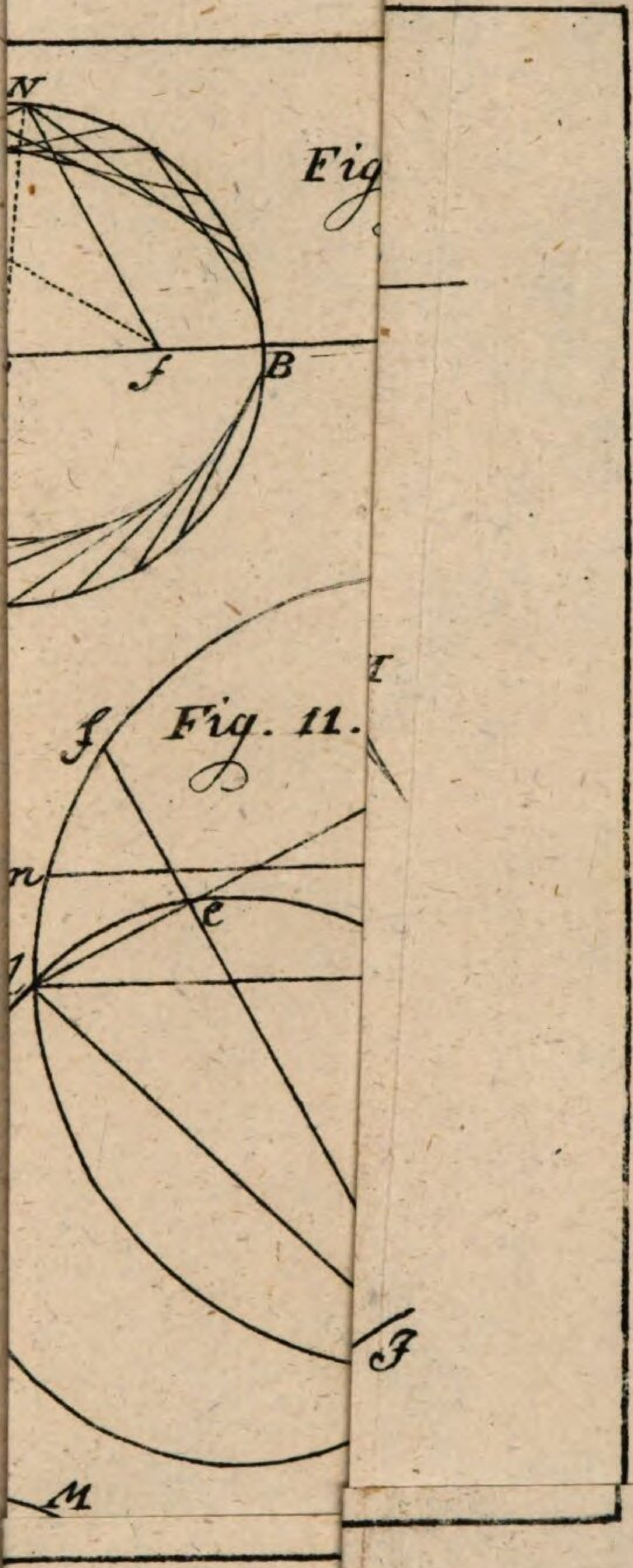
Tab. II.



Tab. III.



Tab IV.



Lambert, Johann Heinrich, 1728-1777

Joh. Heinrich Lamberts, ehemaligen Königl. Preuß. Oberbaurathes und ordentl. Mitgliedes der Königl. Academie der Wissenschaften zu Berlin etc., deutscher gelehrter Briefwechsel
Bd.: 5,2

Berlin (1787)

Math.u. 94 b-5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10594060-7
VD18 80317626-001